目　　录

§1 定理Ⅰ及化直法

在几何量(长度、角度、面积、体积等)的大小比较中，线的长短比较是最基本的.

这一节的内容就是比较线的长短. 主要的依据是下面的定理.

定理Ⅰ 连结 A、B 两点的最短线是线段 AB.

如图1·1曲线 AmB 比折线 $AEFB$ 长，折线 $AEFB$ 比折线 AFB 长，折线 AFB 比线段 AB 长. 最后的一句话也就是：三角形的两条边的和大于第三条边.

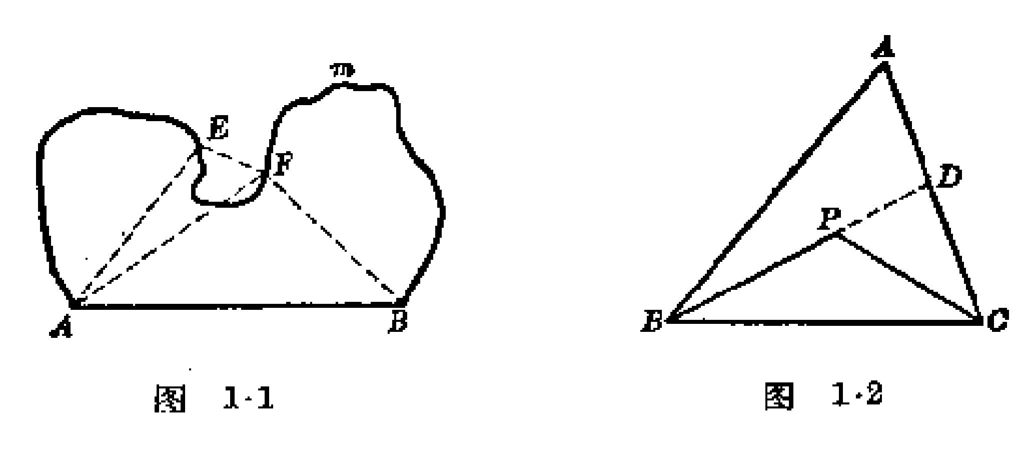


图 1·1　　　　图 1·2

定理Ⅰ在直观上是很明显的，它的证明可以在通常的几何书中找到，我们这里就不详述了.

看上去很简单的定理Ⅰ，应用却很广泛. 它是一个非常重要的基本定理，许多命题的证明都少不了它.

[例题1]　P 为 $\triangle ABC$ 内一点(图1·2)，证明：$PB+PC<AB+AC$.

解　延长 BP 与 AC 相交于 D，由定理Ⅰ，

$$AB+AC=AB+AD+DC$$
$$>BD+DC=BP+PD+DC$$
$$>BP+PC.$$

［例题 2］ P 为 $\triangle ABC$ 内一点(图 1·3)，证明：

$$\frac{1}{2}(AB+AC+BC)<PA+PB+PC<AB+AC+BC.$$

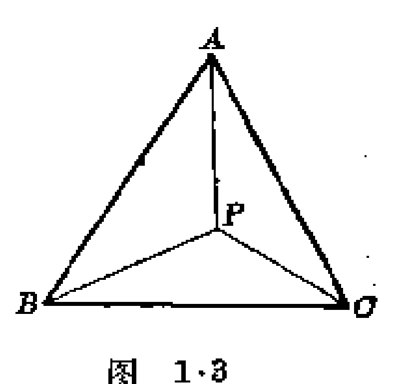


图 1·3

解 $AB<PA+PB$,

$BC<PB+PC$,

$CA<PC+PA$,

三式相加，即得

$$AB+BC+CA<2(PA+PB+PC).$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(AB+BC+CA)<PA+PB+PC.$$

又由例题 1,

$$AB+AC>PB+PC,$$
$$AB+BC>PA+PC,$$
$$BC+AC>PA+PB.$$

三式相加并除以 2 即得

$$AB+BC+CA>PA+PB+PC.$$

［例题 3］ 点 A、B 在直线 MN 两侧(图 1·4)，在 MN 上求一点 S，使 $SA+SB$ 为最小.

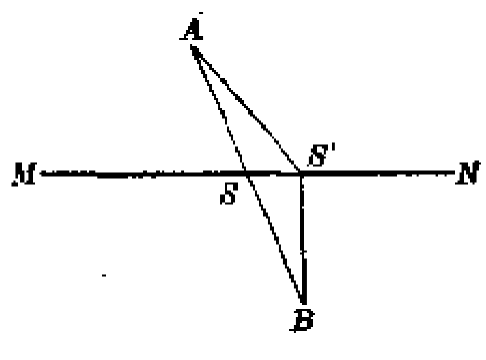


图 1·4

解 这个问题是很简单的. 只要连结 A、B，AB 与 MN 的交点 S 就是所求的点.

为了证明 S 确实是合乎要求的点，只要在 MN 上任取一点 S'，由定理 I,

$$S'A+S'B \geqslant AB=SA+SB,$$

并且当 S' 与 S 不相同时，$\geqslant$ 可改为严格的不等号 $>$.

在一个不等式中，"$\geqslant$"能否改为"$>$"，等号什么时候才成立，往往是一个值得讨论的问题. 但在下面我们不一一指出，请读者自己留意.

［例题 4］ 点 A、B 在直线 MN 的同侧（图 1·5），在 MN 上求一点 S，使 $SA+SB$ 为最小.

解 作点 B 关于 MN 的轴对称点 B'，这一题便化成上一题，即 AB' 与 MN 的交点 S 就是所求的点.

理由是对于 MN 上任一点 S'，

$$S'A+S'B=S'A+S'B' \geqslant AB'=AS+SB'=AS+SB.$$

大家知道光是沿最短线传播的，因此光从 A 到 B 是沿着直线（段）AB 前进的. 这就是定理 I. 光的这种性质常常给我们以启发，帮助我们找到一些几何问题的解.

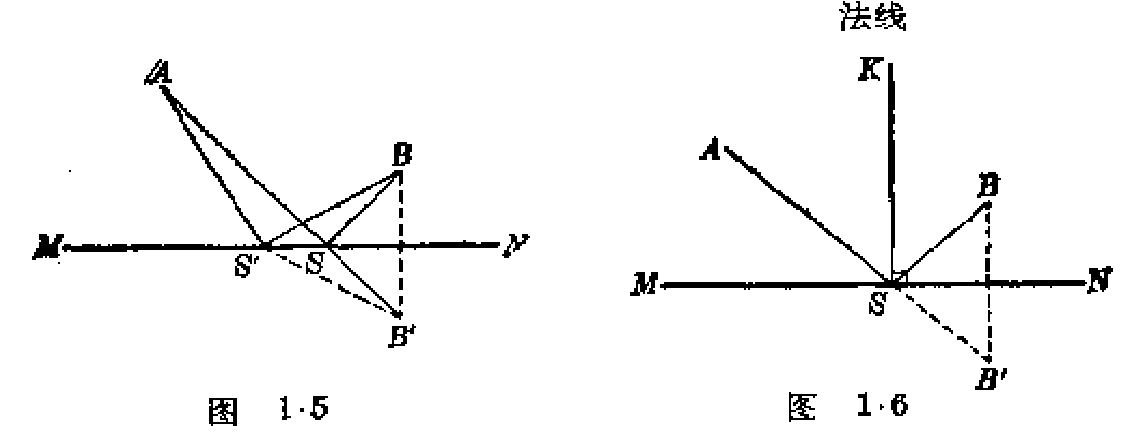


图 1·5 图 1·6

如在例题 4 中，设想 MN 是一面镜子，那么 B 关于 MN 的对称点 B' 也就是 B 在镜中的象. 如果光线从 A 出发，经过镜面上一点 S 再反射到 B，则 $AS+SB=AS+SB'$，但因为光线所走的距离 $SA+SB$ 即 ASB' 应当是最短的. 所以 A、S、B' 应该成一直线. 这样还同时得到光学上的另一条定律：反射角等于入射角，即应当有 $\angle ASK=\angle BSK$（见图 1·6，

SK 为法线，即 MN 的垂线)．这些都和上面推出的结果是一致的．

[例题 5]　A' 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线 AT 上任意一点(图 1·7)．证明：

$A'B+A'C \geqslant AB+AC$.

解　我们把这个不等式中较小的量 $AB+AC$ “伸直”为一条直线段，即延长 BA 到 C' 使 $AC'=AC$，连 A'、C'．显然

$A'B+A'C'>BC'=BA+AC$.

图 1·7

如果 $A'C'=A'C$，那么问题就完全解决了．而这可由 $\triangle AA'C' \cong \triangle AA'C$ 立即推出．

细心的读者会发现，例题 5 与例题 4 实质上是一样的，本题的 AT 便相当于上一题的 MN．

[例题 6]　在同底等高的三角形中以等腰三角形的周长为最小．

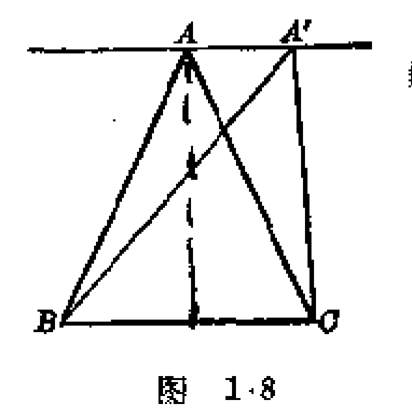


图 1·8

解　设 $\triangle ABC$ 是等腰三角形(图 1·8)：$AB=AC$，$\triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 同底等高，即 A' 到 BC 的距离与 A 到 BC 的距离相等．显然 $AA' /\!/ BC$，并且 AA' 就是 $\triangle ABC$ 的外角平分线，由上一题立即得到 $AB+AC \leqslant A'B+A'C$．

[例题 7]　一个圆盘被曲线 AmB 分成面积相等的两份，证明：曲线 AmB 的长 $l \geqslant$ 圆盘的直径．

解　这里曲线的形状是任意的，似乎很难下手．但考虑到定理 I，我们可以设法把曲线改成折线，即对于曲线 AmB 上任意一点 E (图 1·9)，显然有 $l \geqslant EA+EB$，只要我们能在

曲线 AmB 上选出一个适当的点 E，使 $EA+EB\geqslant$ 圆盘直径就可以了．由于 $\triangle OAB$ 是等腰三角形，根据上面一题，只要过圆心 O 作一条直径 $CD\parallel AB$，CD 与曲线 AmB 的交点 E 就是符合我们要求的点．

剩下的问题是：CD 是否一定与曲线 AmB 相交？不难看出，如果直径 CD 与曲线 AmB 不相交，那么曲线 AmB 完全在 CD 的一侧，这样圆盘被曲线 AmB 分成的两个部分面积一大一小，与已知两部分面积相等矛盾．

我们顺便证明了这样的事实：如果曲线 AmB 的长度 $l<$ 圆盘直径，那么曲线 AmB 一定在某个半圆（$\odot O$ 的一半）内．这是因为曲线 AmB 一定不与平行于弦 AB 的直径 CD 相交，否则 $l\geqslant$ 圆盘直径．

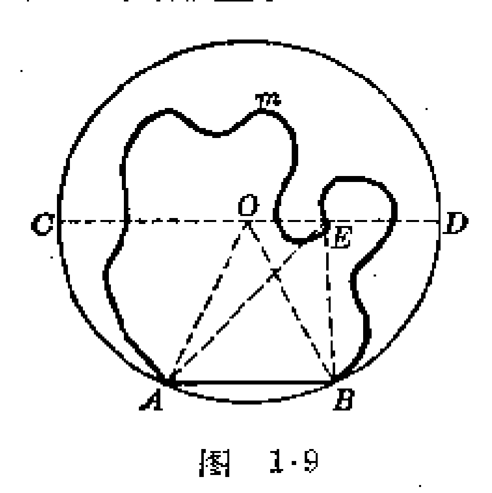


图 1·9

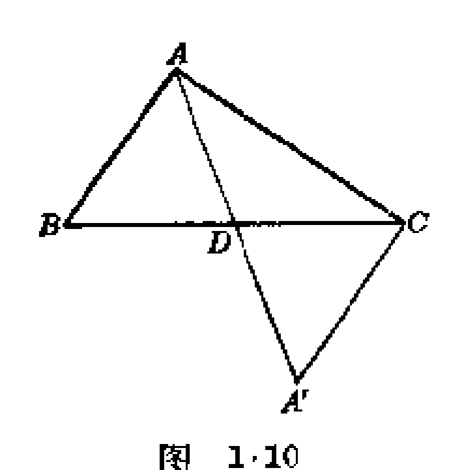


图 1·10

［例题 8］ 在 $\triangle ABC$ 中，AD 为中线，证明：$AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$．

解一 题目所要证明的就是：

$$2AD<AB+AC.$$

我们构造一条长为 $2AD$ 的线段，即延长 AD 到 A' 使 $DA'=AD$（图 1·10，在证明与中线有关的命题时，这是常用的方法之一）．连结 $A'C$．由定理 I，

$$AC+A'C>AA'=2AD.$$

而由三角形的全等不难看出 $AB=CA'$.

解二 我们也可以直接用 AD、$\frac{1}{2}AB$、$\frac{1}{2}AC$ 来构成一个三角形，这只要取 AB 的中点 E（图 1·11），连结 DE，$\triangle AED$ 就是我们所需要的三角形.

$$AD<AE+DE=\frac{1}{2}(AB+AC).$$

我们同时证明了 $AD>\frac{1}{2}|AB-AC|$.

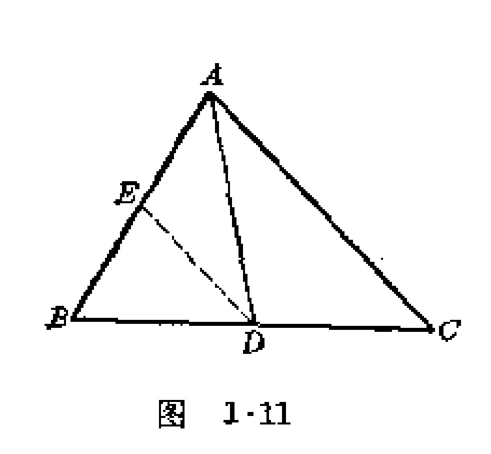


图 1·11

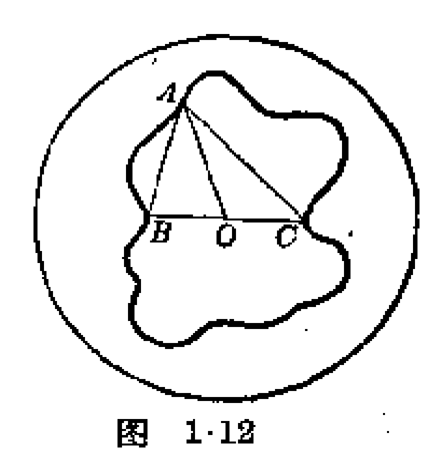


图 1·12

［例题 9］ 证明：长为 $4l$ 的闭曲线 L 一定可以用一个半径为 l 的圆把它覆盖住（注意这里的曲线形状和例题 7 一样，是任意的）.

解 这个问题可以分成两步来解决. 第一步是把所说的覆盖圆作出来，也就是设法找到这个圆的圆心 O. 第二步证明曲线 L 上的每一点都在 $\odot O$ 内或圆周上，也就是对于 L 上的任一点 A，证明 $OA\leqslant l$.

首先来确定圆心 O. 如果 L 本身就是一个圆，那么 O 就是直径 BC 的中点，而 BC 平分圆周即曲线 L. 这就启发我们用下面的方法来确定覆盖圆：在 L 上取两点 B、C 使 B、C 将 L 的长分为相等的两部分（图 1·12），即各等于 $2l$，再取

BC 中点 O，以 O 为圆心，l 为半径作圆.

对于 L 上任一点 A，连结 AB、AC，OA 为 $\triangle ABC$ 的中线，由例题 8：

$$OA \leqslant \frac{1}{2}(AB+AC) \leqslant \frac{1}{2}\cdot 2l = l.$$

这就证明了 $\odot O$ 确实将曲线 L 完全盖住.

[例题 10] $\triangle ABC$ 为正三角形，$\triangle DEF$ 为它的内接三角形，即顶点 D、E、F 分别在 BC、CA、AB 上(图 1·13)，证明 $\triangle DEF$ 的周长 $\geqslant \frac{1}{2}$ $\triangle ABC$ 的周长.

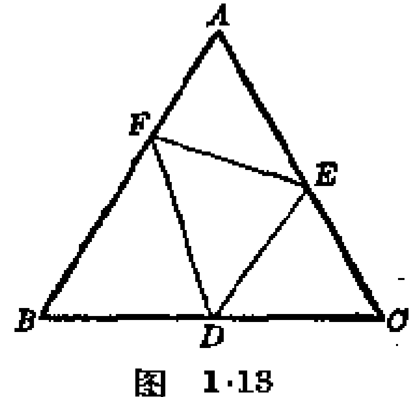


图 1·13

解 设法将 $\triangle ABC$ 的周长化为一条线段，即如图 1·14，将 $\triangle ABC$ 连续翻转五次，各次对称轴分别为 CA、CB'、$B'A'$、$A'C'$、$C'B''$，最后得到一个平行四边形 $ABB''A''$，$AA''=\triangle ABC$ 的周长. 这时 $2\triangle DEF$ 的周长成为折线 $FED'F''E''D'''F$，它的长 $\geqslant AA''$.

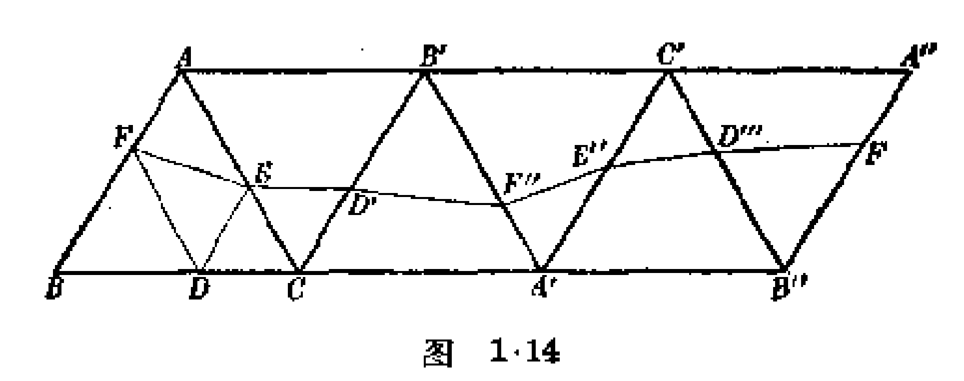


图 1·14

[例题 11] 如果凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$(简称凸多边形 A)在多边形 $B_1B_2\cdots B_m$(简称多边形 B)内，证明：A 的周长 $\leqslant B$ 的周长.

解 首先解释一下什么叫凸多边形. 如果一个多边形的

所有顶点都在它的任一条边的同侧（或这条边上），这个多边形就叫做凸多边形．如图中 A 是凸多边形，而 B 不是凸多边形（B_3、B_6 不在 B_4B_5 的同侧）．

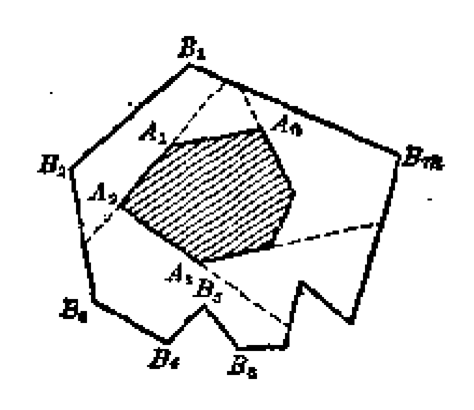


图 1·15

我们采用如下的步骤来证明．

先沿着直线 A_1A_2 将多边形 B 切成两块（图 1·15），由于 A 是凸的，它的顶点在同一块中．去掉不含有 A 的那一块，显然剩下的一块 B' 的周长 $\leqslant B$ 的周长．

再依次沿 A_2A_3，A_3A_4，…切下去，每次保留含 A 的那一块，所留下的多边形 B''，B'''，…的周长一个小于等于前一个．

这样一直切到 A_nA_1，最后剩下的一块就是 A，

$$\therefore\quad A \text{ 的周长} \leqslant B \text{ 的周长}.$$

注意：(1) 多边形 B 不一定要是凸的，但 A 一定要是凸的，否则命题不成立，请读者自己举出反例；

(2) 如果 B 是由曲线围成的，命题当然也成立；

(3) 例题 1 是本例的特殊情况．

例题 11 可以推广为下面的例题 12．

［例题 12］ 如果凸的闭曲线 C 在曲线 C' 内部，证明 C 的周长 $\leqslant C'$ 的周长．

先解释一下凸曲线与凸区域的意义．凸区域是我们经常看到的一种区域（如三角形、正方形、圆、椭圆等），它具有如下的性质："如果 A、B 两点在这种区域 D 中，那么整个线段 AB 都在区域 D 中"．凸区域的边界叫做凸曲线．图中曲线 C 是凸曲线，而 C' 不是，因为 A_1 和 A_2 两点在 C' 的内部但是线段

A_1A_2 并不全在 C' 的内部(图 1·16).

这里的定义包含例 11 的定义,即凸多边形的边界也是凸曲线,凸多边形的内部是凸区域.

现在我们描绘一下例题 12 的证明方法：用 C 的内接凸多边形来“逼近”C,即和用圆的内接正多边形来“逼近”圆的方法相类似,先用点 A_1、A_2、…、A_n 将曲线 C 分为 n 等份,顺次连接 A_1, A_2, …, A_n. 根据 C 的凸性可以证明多边形 $A_1A_2\cdots A_n$(简记为 $C^{(n)}$)也是凸的,由例题 11 的注意(2),$C^{(n)}$ 的周长 $\leqslant C'$ 的周长. 令 $n\to\infty$,取极限就得到

$$C \text{ 的周长} \leqslant C' \text{ 的周长}.$$

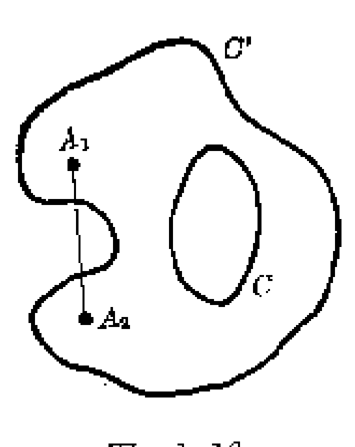


图 1·16

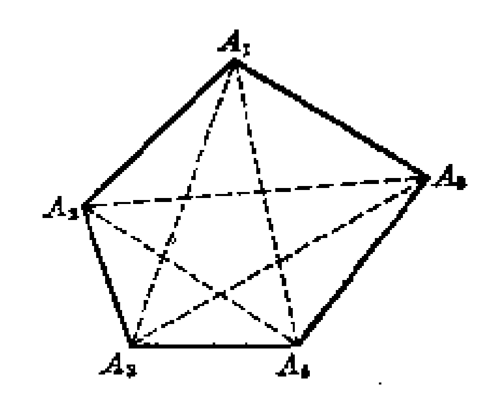


图 1·17

下面介绍一下简单多边形的概念.

如果在平面上给出 n 个一般位置的点(即其中任意三点都不共线),用这些点为顶点可以作出许多 n 边形,如图 1·17 中五个点 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 可以组成五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$(图中实线)及 $A_1A_3A_5A_2A_4$(图中虚线),还可以组成五边形 $A_1A_3A_4A_2A_5$ 等. 这些 n 边形有的边界自身相交(如图中 $A_1A_3A_5A_2A_4$ 的边 A_1A_3 与 A_5A_2 相交),有的边界不自身相交,如图中 $A_1A_2A_3A_4A_5$. 边界不自身相交的多边形称为简单多边形.

凸多边形显然都是简单多边形．除了下面的例题13，本书中的多边形都是指简单多边形．

[例题13]　给出平面上n个($n\geqslant 3$)一般位置的点A_1、A_2、…、A_n，证明一定有一个以这些点为顶点的简单多边形．

这个问题表面上看起来与不等式毫不相干，实际上在证明中定理Ⅰ起了关键的作用．

我们首先证明这样的一个事实：

以A_1、A_2、…、A_n为顶点的多边形中，周长最小的一个边界一定不自身相交．换句话说，边界自身相交的一定不是周长最小的．

我们证明后一句话．假设多边形$A_1A_2\cdots A_n$的边界自身相交，不失一般性可以假定A_1A_2与A_mA_{m+1}相交于O(图1·18)，连A_1A_m、A_2A_{m+1}，那么

$$\begin{aligned}A_1A_m+A_2A_{m+1}&<(A_1O+A_mO)\\&\quad+(OA_{m+1}+OA_2)\\&=(A_1O+OA_2)+(A_mO+OA_{m+1})\\&=A_1A_2+A_mA_{m+1}.\end{aligned}$$

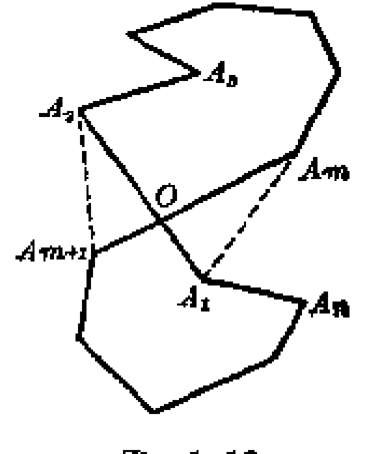


图　1·18

可见

$$\text{多边形 }A_2A_3\cdots A_mA_1A_n\cdots A_{m+1}\text{ 的周长}$$
$$<\text{多边形 }A_1A_2\cdots A_mA_{m+1}\cdots A_n\text{ 的周长}.$$

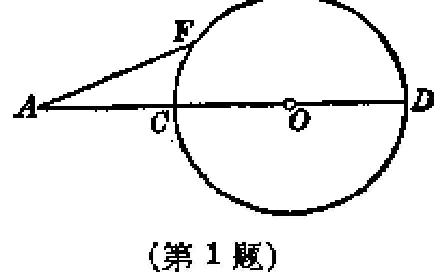
即多边形$A_1A_2\cdots A_n$不是周长最小的．

现在我们来证明例题13．以A_1、A_2、…、A_n为顶点的多边形只有有限多个(不难算出其总数为$(n-1)!/2$)，所以其中必有一个周长最小的，根据上面所证的，这个周长最小的多边形一定是简单多边形．

这一节所用的方法可以称为"化直法"，即设法将曲线化为折线，折线再化为直线(段)．根据定理Ⅰ，施行这样的操作后长度总是减少的．当然化直的方法多种多样，应当具体问题具体分析．

习　题　一

1．如图，A 在 $\odot O$ 外，直线 AO 交圆周于 C、D，F 为圆周上任意一点，证明：$AC \leqslant AF \leqslant AD$．$A$ 在圆内或圆周上情况如何？

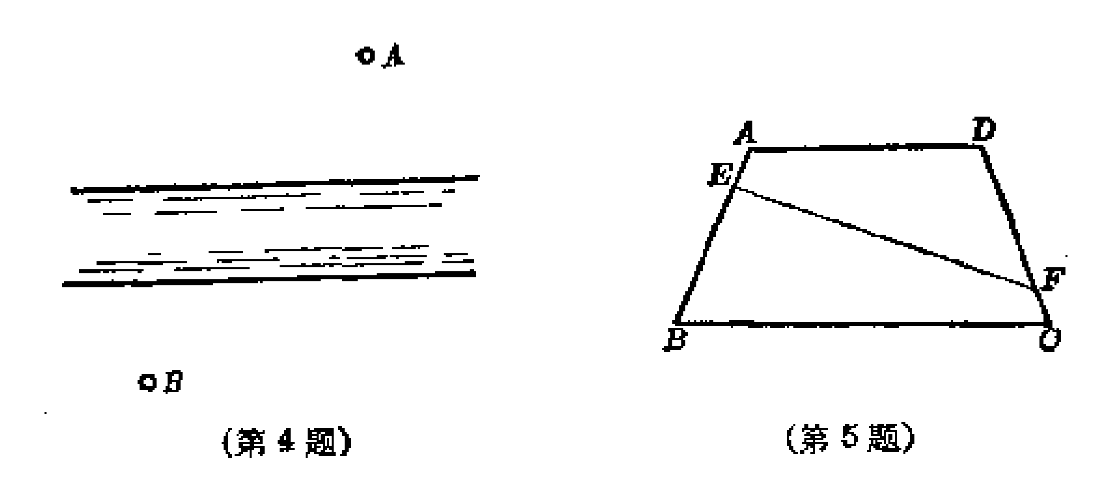


(第1题)

2．已知 $\triangle ABC$ 中，一边为另一边的两倍，证明：最小边在周长的 $\frac{1}{6}$ 与 $\frac{1}{4}$ 之间．

3．A、B 为直线 MN 外两点，$AB \nparallel MN$，在 MN 上找一点 S，使 $|SA-SB|$ 为最大．

4．如图，假定河岸为两条平行直线，怎样垂直于河岸造一座桥 PQ，使 $AP+PQ+QB$ 为最小？

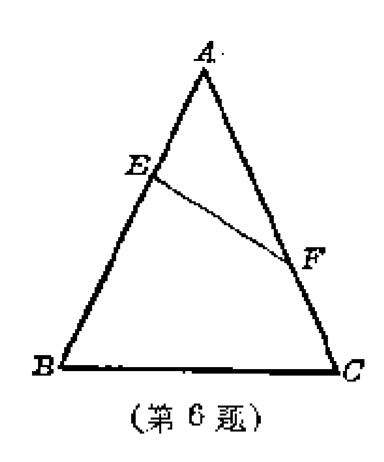


(第4题)　　(第5题)

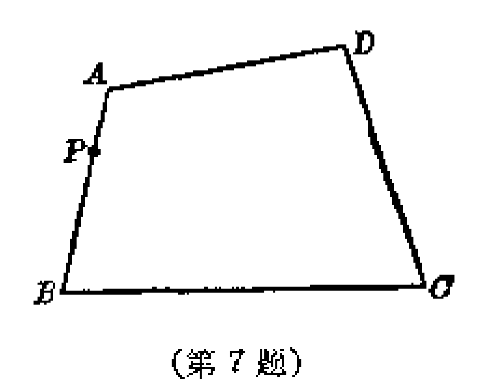
5．图中 $AD \parallel BC$，$AB=CD$，$AE=CF$，

证明：$EF \geqslant \frac{1}{2}(AD+BC)$．

6. $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $AE=CF$,证明: $EF\geqslant\frac{1}{2}BC$.



(第 6 题)



(第 7 题)

7. 四边形 $ABCD$ 中, $CD>AB$, P 为 AB 上一点,证明: P 到四个顶点的距离的和 < 四边形的周长.

8. 在凸四边形 $ABCD$ 内任取一点 P,是否一定有

$$PA+PB+PC+PD\leqslant AB+BC+CD+DA?$$

如果一定有,试加以证明,如果不一定有,试举例说明.

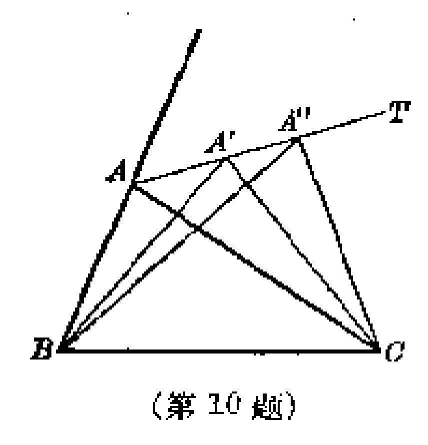
9. 在例 2 中, 我们证明了

$$\frac{1}{2}(AB+BC+CA)<PA+PB+PC<1\cdot(AB+BC+CA).$$

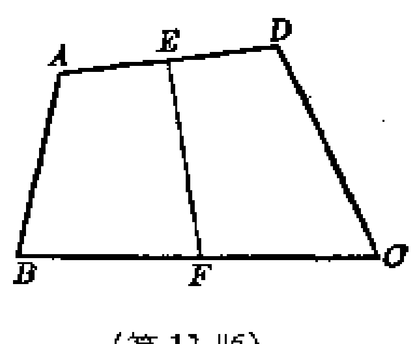
能不能将$\frac{1}{2}$换成更大的数或者将 1 换成更小的数?

10. A'、A''都在$\triangle ABC$的外角平分线AT上,并且$AA''>AA'$. 证明:

$$A'B+A'C<A''B+A''C.$$



(第 10 题)



(第 11 题)

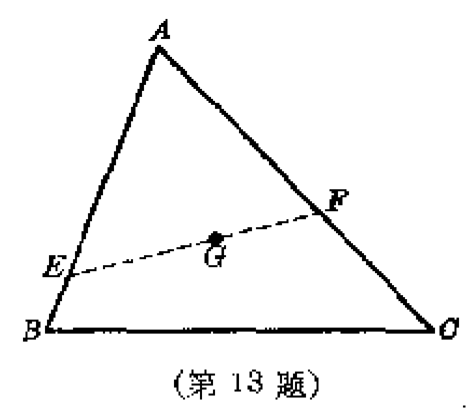
11. 凸四边形 $ABCD$ 中, E、F 分别为 AD、BC 的中点,证明:

$$|AB-CD|\leqslant 2\cdot EF\leqslant AB+CD.$$

12. 能不能作一个半径为 $\frac{1}{4}(AB+BC+CD+DA)$ 的圆将上题的四边形完全盖住？如果能，把这个圆作出来．如果不能，说明其理由。

13. G 为 $\triangle ABC$ 的重心，一条直线过 G，分别交 AB、AC 于 E、F，证明：

$$EG\leqslant 2GF.$$



（第 13 题）

14. 证明四边形的两条对角线的和小于四边形的周长．一般地，设 $A_1A_2\cdots A_n$ 为凸多边形，证明：



n 为奇数时，

$$\sum_{i<j} A_iA_j < A_1A_2\cdots A_n \text{ 的周长} \times \left(1+2+\cdots+\frac{n-1}{2}\right);$$

n 为偶数时，

$$\sum_{i<j} A_iA_j < A_1A_2\cdots A_n \text{ 的周长} \times \left[1+2+\cdots+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\frac{n}{4}\right].$$

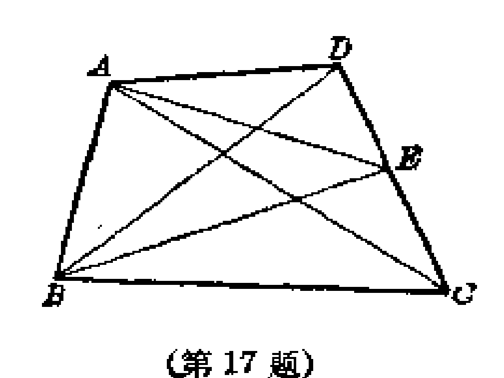
15. $\odot O$ 为正三角形 ABC 的外接圆，P 在 $\overset{\frown}{BC}$ 上，证明：$PA=PB+PC$。并进一步证明：如果 P 不在 $\overset{\frown}{BC}$ 上，那么 $PA<PB+PC$。

16. 证明对任意四边形 $ABCD$，恒有

$$AC\times BD\leqslant AB\times CD+AD\times BC.$$

等号什么时候成立？

17. 如图 $ABCD$ 是凸四边形，E 为 CD 上一点，$CA+CB=r_1$，$DA+DB=r_2$，证明：$EA+EB\leqslant \max(r_1, r_2)$，（这里的 $\max(r_1, r_2)$ 表示 r_1，r_2 中较大的一个）并由此证明椭圆是凸的。



（第 17 题）

§2　定理II～VI及例题

以下定理在证明不等式时也是常用的.

定理II　自点M向直线引斜线，斜线较长的射影也较长. 反过来，射影较长的斜线也较长.

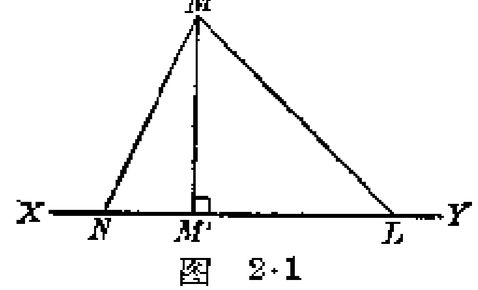


图 2·1

如图2·1，定理II就是说$ML>MN$与$M'L>M'N$是同时成立的，特别地，垂线MM'（它的射影缩成一个点，即点M'，可以看成长度为零的线段）比一切斜线都短.

定理III　在$\triangle ABC$中，如果$AB\geqslant AC$，那么$\angle ACB\geqslant\angle ABC$. 反过来，如果$\angle ACB\geqslant\angle ABC$，那么$AB\geqslant AC$.

定理IV　在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，已知$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，如果$\angle A\geqslant\angle A'$，那么$BC\geqslant B'C'$. 反过来，如果$BC\geqslant B'C'$，那么$\angle A\geqslant\angle A'$.

定理V　在同一圆中，如两个圆周角都小于$90°$，那么圆周角较大的所对弦也较大，反过来弦较大的所对圆周角也较大.

定理VI　在同一圆中，两条劣弧中较大的所对的弦也较大，反过来也正确.

定理II至VI的证明可以在通常的几何课本中找到.

下面举一些例题来说明这些定理的作用

[例题1]　$\triangle ABC$中（图2·2），$AB>AC$，AD为高，E

为 AD 上任意一点，证明：$EB>EC$.

解 应用定理 II，由 $AB>AC$ 得 $BD>DC$ 再应用定理 II，由 $BD>DC$ 得 $EB>EC$.

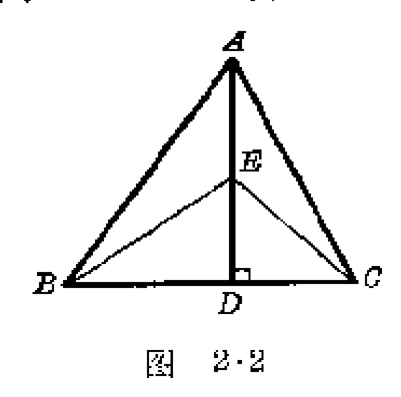


图 2·2

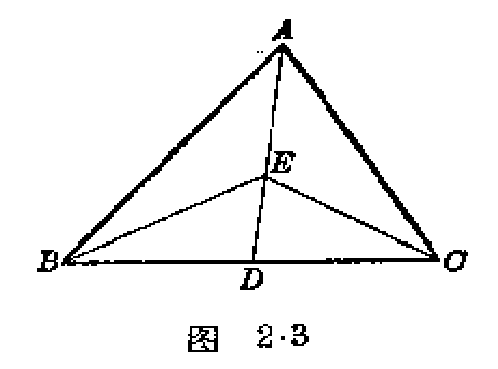


图 2·3

[例题 2] $\triangle ABC$ 中（图 2·3），$AB>AC$，AD 为中线，E 为 AD 上任意一点，证明：$EB>EC$.

解 应用定理 IV.

[例题 3] $\triangle ABC$ 中（图 2·4），$AB>AC$，AD 为角平分线，E 为 AD 上任意一点．证明：$EB>EC$.

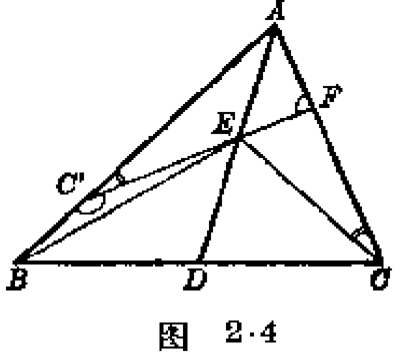


图 2·4

解 本题不能象上面两题那样，直接应用上述定理，但可以设法把 EB、EC 集中到一个适当的、便于应用定理 III 的三角形中去．方法是在 AB 上取 C' 点，使 $AC'=AC$（由于 $AB>AC$，$\therefore C'$ 在线段 AB 内），由全等三角形可知 $EC'=EC$，只要证明 $EB>EC'$ 即 $\angle EC'B>\angle EBC'$．如果能够证出 $\angle EC'B$ 是钝角，问题当然解决．现在我们延长 $C'E$ 与 AC 相交于 F，由三角形的外角大于和它不相邻的内角可知图中 $\angle EC'B>\angle AFE>\angle ACE=\angle AC'E$．故 $\angle EC'B$ 是钝角，这就得到所需结论．

C' 就是 C 关于 AE 的对称点．线段的垂直平分线、角平分线可以用作对称轴，这也是一种常用的证明方法．

［例题 4］ $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，BE、CF 为高，证明：$BE>CF$.

解一 BE、CF 分别在 $\triangle BCE$ 与 $\triangle CBF$ 中，如果这两个三角形符合定理 IV 的条件，问题就解决了.

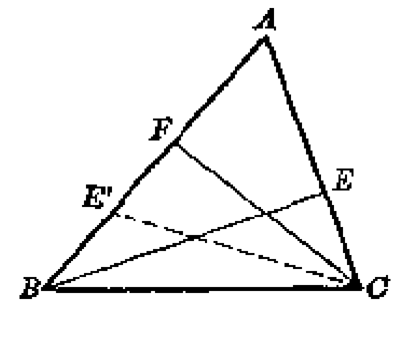


图 2·5

现在由 $AB>AC$ 可得 $\angle ACB>\angle ABC$，又有公共边 $BC=BC$. 但 BF 与 CE 并不相等，所以不能直接应用定理 IV. 不过，我们可以在 AB 上取 $BE'=CE$，$\triangle CBE'$ 与 $\triangle BCE$ 满足定理 IV 的条件，因而有 $CE'<BE$. 又斜线 $CE'>$ 垂线 CF. 故 $BE>CF$.

解二 将 BE、CF 分别延长到 E'、F'（图 2·6），使 $EE'=BE$，$FF'=CF$. 不难看出 $\angle E'CB=2\angle ACB>2\angle ABC=\angle F'BC$，$CE'=CB=BF'$.

将定理 IV 应用到 $\triangle BCE'$ 和 $\triangle CBF'$ 立即得到

$$2BE>2CF, \quad \therefore \quad BE>CF.$$

虽然图中画的都是锐角三角形，上面的两种证法对于直角或钝角三角形也完全适用，读者可自己画图验证. 又本题也可以借助三角形的面积公式来证明.

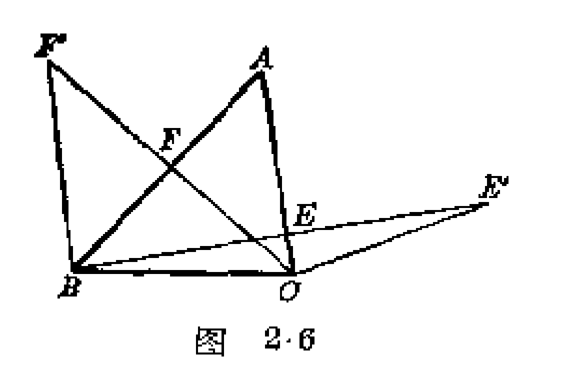


图 2·6

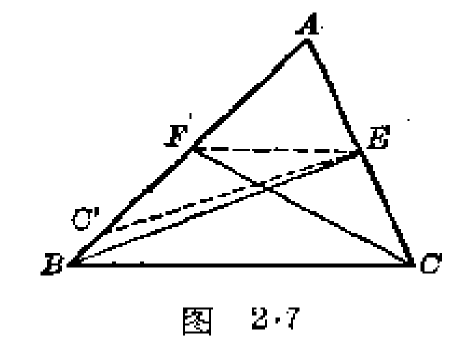


图 2·7

［例题 5］ $\triangle ABC$ 中（图 2·7），$AB>AC$，BE、CF 为中

线，证明：$BE>CF$.

解一 $\because \quad FB=\dfrac{1}{2}AB>\dfrac{1}{2}AC=CE$.

$\therefore$ 可在 FB 内取一点 C'，使 $FC'=EC$.

$$\because \quad \angle EFC'=180^\circ-\angle ABC>180^\circ-\angle ACB$$
$$=\angle FEC.$$

$\therefore$ 由 $\triangle EFC'$ 和 $\triangle FEC$ 可得 $EC'>CF$.

又 $\because \angle ABC<\angle ACB$，$\therefore \angle ABC$ 是锐角. 从而 $\angle BFE$ 是钝角，$\angle BC'E>\angle BFE$，$\therefore \angle BC'E$ 也是钝角. 由定理 III $BE>EC'>CF$.

这里的证法与例 4 略有不同，能不能在 BF 上取 $BE'=CE$，然后再证明 $CE'>CF$ 呢？请读者参看本节习题的第 10 题.

图 2·8

解二 我们知道 BE、CF 的交点 G 是三角形的重心(图 2·8)，它是三条中线的交点并且将每条中线分为 1:2. 于是 G 在中线 AD 上，由例 2，$GB>GC$，即 $\dfrac{2}{3}BE>\dfrac{2}{3}CF$，

$$\therefore \quad BE>CF.$$

显然从例 4、例 5 可以推出：如果两条高(中线)相等，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

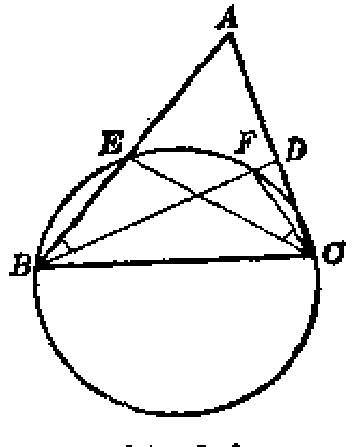


图 2·9

[例题 6] 证明：三角形中较大角的角平分线 < 较小角的角平分线.

解 设 $AB>AC$，CE、BD 为角平分线(图 2·9).

作 $$\angle ECF=\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC,$$

CF 交直线 BD 于 F.

$$\because \quad \angle ACB > \angle ABC,$$

$$\therefore \quad \angle DCE > \angle ABD,$$

从而 CF 在 $\angle DCE$ 内部，F 在线段 DB 内部.

B、C、F、E 四点共圆.

$$\because \quad \angle BCF > \angle EBC,$$

$$\therefore \quad \overset{\frown}{BEF} > \overset{\frown}{CFE},$$

并且

$$\angle BCE + \angle ECF = 90° - \frac{1}{2}\angle A < 90°,$$

$\therefore \overset{\frown}{BEF}$ 是劣弧，根据定理 VI,

$$CE < BF < BD.$$

由例题 6，我们立即得到：如果一个三角形的两条角平分线相等，那么这个三角形是等腰三角形. 这是 1840 年 Lehmus 提出的问题，为 Steiner 首先证明，因此称为 Steiner-Lehmus 定理. 这个定理有几十种不同的证法，利用例题 6 来证明是较简单的一种.

[例题 7] 已知 $AB=AC$，D 在 $\triangle ABC$ 内，$\angle ADC$ $\angle ADB$(图 2·10). 证明：$DB>DC$.

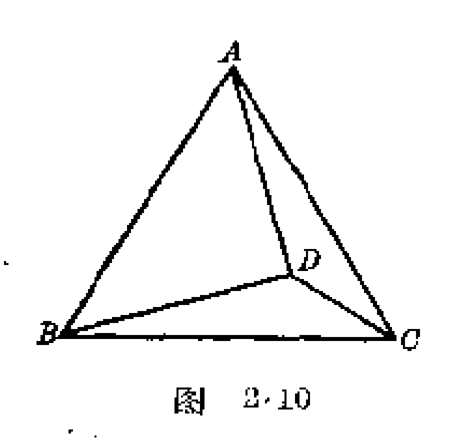


图 2·10

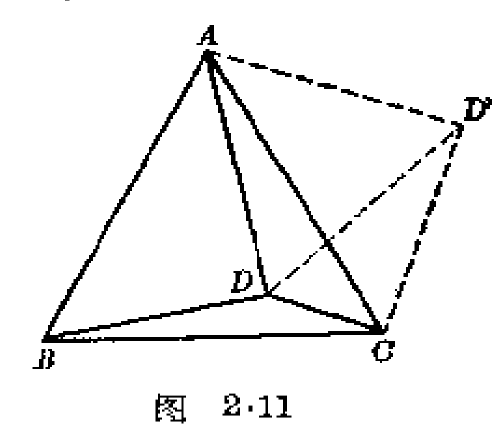


图 2·11

解一 绕 A 点作一个旋转，旋转角为 $\angle BAC$，使得 $\triangle ABD$ 成为 $\triangle ACD'$(图 2·11)，连结 DD'.

$$\because \quad AD=AD', \quad \therefore \quad \angle ADD'=\angle AD'D.$$

又 $$\angle AD'C=\angle ADB<\angle ADC,$$

$$\therefore \quad \angle CD'D<\angle CDD',$$

从而 $$CD<CD',$$

即 $$CD<BD.$$

解二 $\because$ 三角形的内角和等于180°，而

$$\angle ADC>\angle ADB,$$

$$\therefore \quad \angle BAD>\angle CAD$$

或 $$\angle ABD>\angle ACB$$

至少有一个成立.

如果 $\angle BAD>\angle CAD$，则由 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$，应用定理IV可得 $DB>DC$.

如果 $\angle ABD>\angle ACD$，则

$$\because \quad \angle ABC=\angle ACB,$$

$$\therefore \quad \angle DBC<\angle DCB,$$

由定理III得 $DB>DC$.

［例题 8］ $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，BE、CF 为高. 证明：

$$AB+CF>AC+BE.$$

解 所说不等式即

$$AB-AC>BE-CF.$$

我们在 AB 上取 C'（图 2·12），使 $AC'=AC$，则

$$BC'=AB-AC.$$

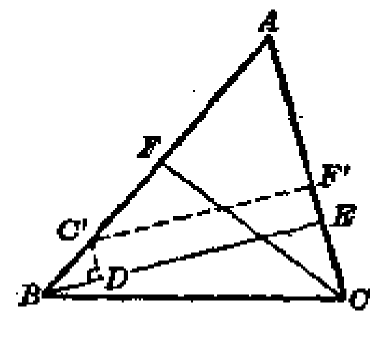


图 2·12

由于 $\triangle AC'C$ 是等腰三角形，所以 C' 到 AC 的距离 $C'F'=CF$. 由例题 4，$BE>CF$，所以可以在 BE 上取 $ED \perp\!\!\!\!= C'F'=CF$. 显然 $C'DEF'$ 为平行四边形，所以 $C'D /\!/ F'E$，从而 $C'D\perp BD$. 在直角三角形 BDC'

中，斜边 $BC'>$ 直角边 BD，即

$$AB-AC>BE-CF.$$

［例题 9］ $\triangle ABC$ 是等腰三角形：$AB=AC$，A' 和 A 不重合，$\triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 在公共边 BC 的同一侧(图 2·13)，并且 $A'B+A'C=AB+AC$，$A'B$ 与 AC 相交于 O。证明：$OA>OA'$。

解 我们希望能证明 $\angle OAA'<\angle OA'A$，前者在 $\triangle ACA'$ 内，只要使后者也放在一个适当的三角形内以便利用定理 IV。

不失普遍性，由条件可设 $A'B>AB$。故可在 $A'B$ 上取 $A'D=AB$，则

$$AD>AB-BD=AB-(A'B-AB)=A'C.$$

对 $\triangle AA'D$ 和 $\triangle A'AC$ 应用定理 IV 就可以得到所要的结论。

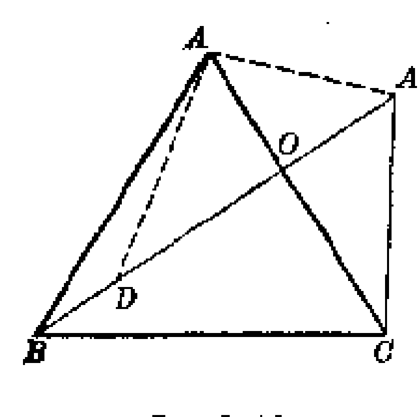


图 2·13

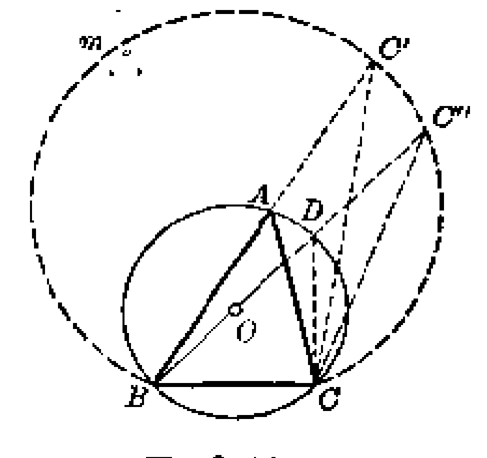


图 2·14

［例题 10］ 锐角三角形 ABC 内接于圆 O，证明：$\triangle ABC$ 的周长 $>2\times\odot O$ 的直径。

解 不妨假定 $\angle ACB$ 为最大的内角。延长 BA 到 C'，使 $AC'=AC$ (见图 2·14)，

则
$$\angle CC'B=\frac{1}{2}\angle CAB.$$

又作直径 BD 并延长到 C''，使 $DC''=DC$，则

$$\angle CC''D=\frac{1}{2}\angle CDB=\frac{1}{2}\angle CAB=\angle CC'B.$$

$\therefore B$、C、C''、C' 共圆.

在这个较大的圆中，

$$\because\quad \angle BCC'=\angle ACB+\frac{1}{2}\angle BAC\geqslant\frac{1}{2}\angle ACB$$

$$+\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BAC=90^\circ,$$

$\therefore$ 弧 $\overset{\frown}{BmC'}$ 为优弧，而弧 $\overset{\frown}{BCC'}$ 为劣弧或半圆.

$\because \angle ACB$ 是锐角，$\therefore O$ 在 $\triangle ABC$ 内，

$$\therefore\quad \overset{\frown}{BCC'}>\overset{\frown}{BCC''},$$

$$\therefore\quad BC'>BC''$$

即
$$AB+AC>CD+BD,$$

$$\therefore\quad AB+AC+BC>BD+CD+BC>2BD.$$

显然，对直角三角形，结论也成立．对钝角三角形，结论不一定成立，反例请读者自己举.

这一节的几个定理也是证明不等式时常常用到的．有时不能直接应用这些定理，需要添置适当的辅助线，或采用反射、平移、旋转等变换，将图形移到适当的位置或变成适当的图形，以便应用定理.

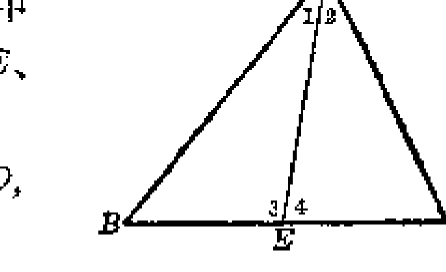
从本节的例题4、5、6及习题一的15、16等题，可以看出不等与相等的关系是非常密切的.

习　题　二

1．$\triangle ABC$ 中，D 为 BC 上一点，证明：$AD\leqslant\max(AB,\ AC)$，并由此证明圆是凸的.

2. 如图 AE 为中线，$AB>AC$，证明：(1) $\angle 2>\angle 1$；(2) $\angle 3$ 为钝角。

3. 已知 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，C 为锐角，AD 为角平分线，AF 为高，AE 为中线，证明：从 B 到 C 的顺序为 AB、AE、AD、AF、AC。

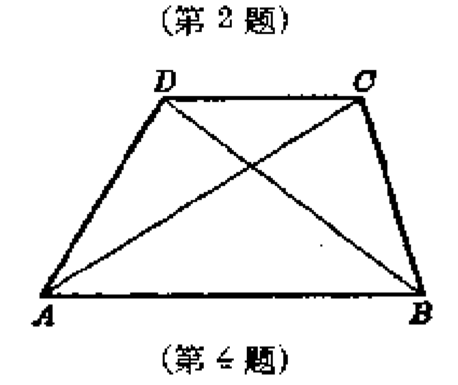


(第 2 题)

4. 梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB>CD$，$AD>BC$，证明：

(1) $\angle CBA>\angle DAB$；

(2) $AC>BD$。



(第 4 题)

5. 已知 $\triangle ABC$ 中，$AB\leqslant\frac{1}{2}AC$，证明：$\angle ACB<\frac{1}{2}\angle ABC$。

6. $\triangle ABC$ 中，D 为 $\angle BAC$ 的平分线上一点，证明：$AB-AC>DB-DC$。

7. $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，AD 为角平分线，证明：

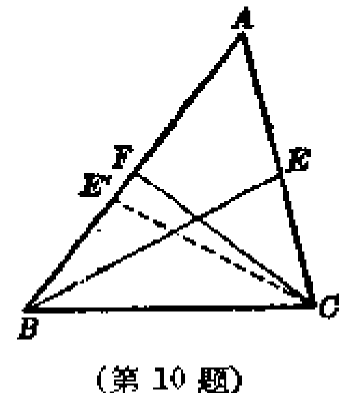
(1) $BD>DC$；

(2) $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$。

8. 三角形的内切圆直径小于任一条边。

9. 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，已知 $\angle A>\angle A'$，$AB>A'B'$，$AC>A'C'$，是否一定有 $BC>B'C'$？

10. $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，BE、CF 为中线，$BE'=CE$。证明：$BE>CE'$。是不是一定有 $CE'>CF$？



(第 10 题)

11. 用其他方法来解例 4。

12. P 为锐角三角形 ABC 内一点，如果 P 不是外接圆的圆心，证明 PA、PB、PC 中一定有小于外接圆半径 R 的。

13. $\odot O$ 中，C、D 三等分弦 AB，证明 $\angle AOC<\frac{1}{3}\angle AOB$。

14. 利用 §1 例 9 证明本节例 10。

15. D 为等腰三角形 $ABC(AB=AC)$ 内一点，$DB>DC$，证明：$\angle BDA<\angle CDA$.

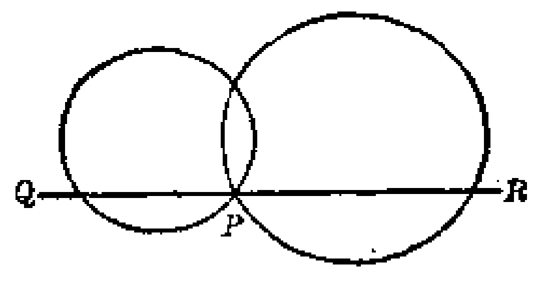
16. AB 为 $\odot O$ 的弦，M 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，D 为 $\overset{\frown}{AM}$ 上一点，C 为 BD 上一点，证明：

(1) 如果 $\angle MCB$ 为锐角，那么 $BC>AD+DC$；

(2) 如果 $\angle MCB$ 为直角，那么 $BC=AD+DC$；

(3) 如果 $\angle MCB$ 为钝角，那么 $BC<AD+DC$.

17. 过两圆交点 P 作割线 PQR，使它的长为极大.



（第 17 题）

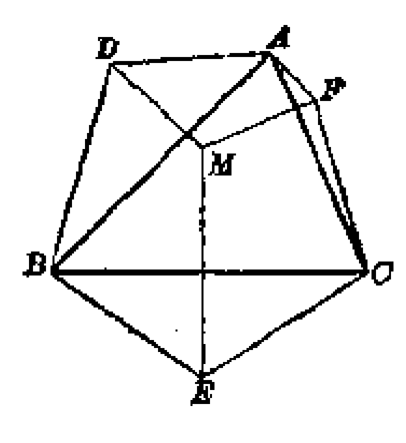
18. $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，BE、CF 为高，D 为 BC 上一点，D 到 AB、AC 的距离分别为 DG、DH. 证明：$BE>DG+DH>CF$.

19. M 为 $\triangle ABC$ 内一点，MD、ME、MF 分别与 AB、BC、CA 垂直.

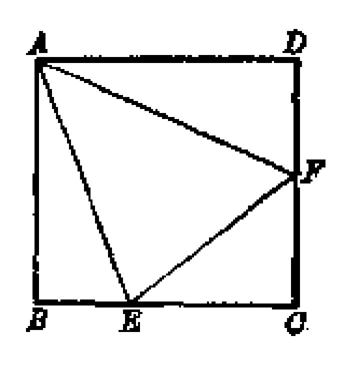
(1) 如果 $BD\geqslant AD$, $CE\geqslant BE$，证明：$CF\geqslant AF$；

(2) 如果 $BD\geqslant BE$, $CE\geqslant CF$，证明：$AD\geqslant AF$.

试对 n 边形考虑类似的问题.



（第 19 题）



（第 20 题）

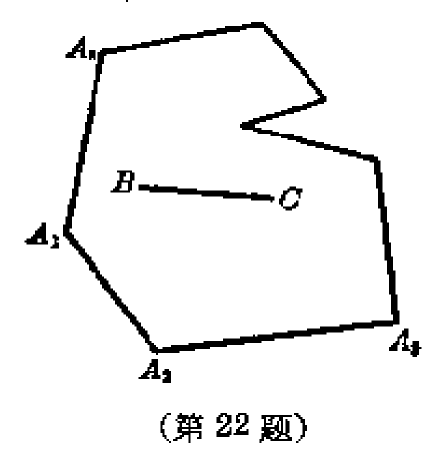
20. E、F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 的内部，证明：

$$\angle AFE>45^{\circ}.$$

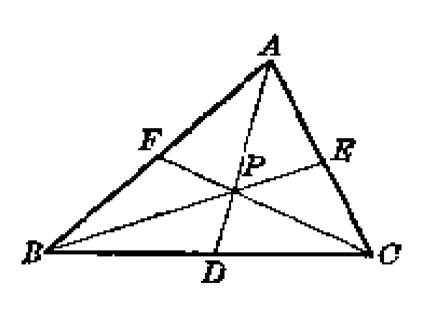
21. 在上题中(1)如果 $\angle EAF=45^{\circ}$，证明：$EF\leqslant AB$, $\angle AEF=\angle AEB$;

(2) 如果 $\angle EAF<45°$，证明：$EF<AB$，$\angle AEF>\angle AEB$.

22. B、C 为多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中任意两点，证明：$BC\leqslant \max A_iA_j$.



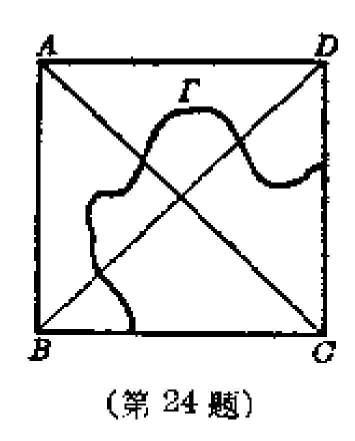
（第 22 题）



（第 23 题）

23. P 为 $\triangle ABC$ 内一点，直线 AP、BP、CP 分别交 BC、CA、AB 于 D、E、F，证明：$PD+PE+PF<\triangle ABC$ 的最长边.

24. 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 内有一条曲线 Γ，它的端点在 BC 及 CD 上. 如果 Γ 与对角线 BD 相交，证明：Γ 的长 $\geqslant 1$.



（第 24 题）

25. 设正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内接于 $\odot O$，P 在正 n 边形内，证明：一定可以找到两个顶点 A_i、A_j，使得 $180°\left(1-\frac{1}{n}\right)\leqslant\angle A_iPA_j\leqslant 180°$.

§3 等高线法与局部调整法

由前两节的一些例题，我们已经看到不等式与极值问题的关系是十分密切的．一般地说，一个函数 $f(x)$，如果在 x_0 处取得最大或最小值 $f(x_0)$，那么对于属于定义域的 x 有 $f(x)\leqslant f(x_0)$ 或 $f(x)\geqslant f(x_0)$ 所以每个极值问题都导出一个不等式．

反过来，如果 $f(x)\leqslant A$ 或 $f(x)\geqslant A$，并且在 $x=x_0$ 时 $f(x)=A$，那么 $f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 的最大或最小值．

我们只讨论几何中的极值问题．几何中的极值通常总是存在的，问题是如何把它找出来．

这一节介绍两种找极值的方法．

下面的等高线法是寻找极值的常用方法，我们先举一个简单的例子：

[例题 1]　在直线 AB 上找一点 P，使 P 到线外一点 O 的距离为最小．

解　如果 P 到 O 的距离 r 为已知，那么只要以 O 为圆心，r 为半径画圆，这圆与 AB 的公共点（交点或切点）就是所要求的点 P．这种方法就是“轨迹相交法”．

图 3·1

现在 r 是未知的．如果我们让 r 从零逐渐增大，那么就得到一个一个的以 O 为圆心的同心圆（图 3·1，$r=0$ 时为一点，这是退化了的圆），好象将一块石子投入水中，水面形成的波

纹．同一个圆上的点到 O 的距离都相等，因此我们把这些圆叫做等值线，也叫做等高线，后一个名称是从地理学借来的，在地图的绘制中常用这样的线来表示高度相同的点．

如果 r 很小，$\odot(O, r)$ 即以 O 为圆心，r 为半径的圆（下同）与 AB 无公共点，r 逐渐增大，到某一个值 r_0 时，$\odot(O, r_0)$ 与 AB 相切于点 P，$r>r_0$ 时，$\odot(O, r)$ 与 AB 相交．显然 P 就是直线 AB 上唯一的与 O 点距离最小的点．这最小距离就是 r_0（$\because r<r_0$ 时，$\odot(O, r)$ 与 AB 不相交，$\therefore AB$ 上的点与 O 的距离 $\geqslant r_0$）．r_0 也就是 O 点到直线 AB 的距离，即 O 到 AB 的垂线的长．这从 §2 定理 II 也可以明显地看出来．

综上所述，只要以 O 为圆心，作一个与 AB 相切的圆，切点 P 就是所求的点．

例题 1 所用的等高线法，不仅可以帮助我们找到所要的解，而且可以看出函数值（例题 1 中是以点到 O 的距离为函数值）变化的情况．

［例题 2］ A、B 在直线 MN 同侧，试在 MN 上找一点 P，使 $PA+PB=$ 最小．

解 本例即 §1 例题 4，但现在采用等高线法．

我们知道到 A、B 两点距离和等于定长 r 的点的轨迹是以 A、B 为焦点，长轴为 r 的椭圆（图 3·2）．当 r 由 AB（根据定理 I，r 的值至少为 AB）逐渐增大时，绘出一圈圈的同焦点椭圆（在 $r=AB$ 时是线段 AB，这是退化的椭圆）．和例题 1 一样，在椭圆与 MN 相切时，切点 P_0 就是所求的点．

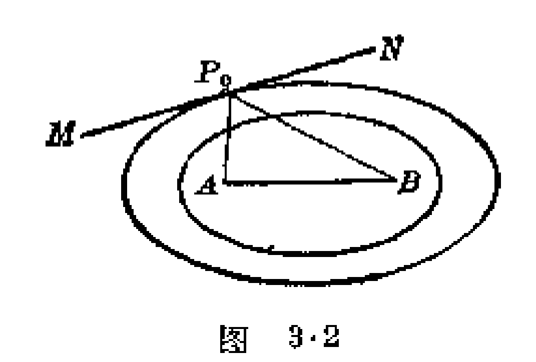


图 3·2

这里所得的结果与 §1 例题 4 是吻合的．因为由椭圆的

光学性质，切线 MN 与 AP_0、BP_0 所成的角相等，即

$$\angle AP_0M=\angle BP_0N.$$

[例题 3]　在同底等面积的三角形中以等腰三角形的周长为最小.

解　设底为 AB.

由于对称，只要考虑另一顶点在 AB 的同一侧的情况.显然面积为一定的 $\triangle ABP$ 的顶点都在一条与 AB 平行的直线 MN 上(图 3·3).

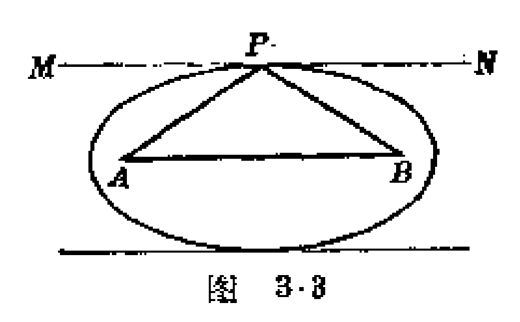


图 3·3

作一个以 A、B 为焦点的椭圆与 MN 相切，切点就是 MN 上与 A、B 两点距离和为最小的点 P. 这时 $\angle A=\angle MPA=\angle NPB=\angle B$, $\therefore$ $\triangle PAB$ 是等腰三角形.

[例题 4]　同底、同周长的三角形中以等腰三角形的面积为最大.

解　设底为 BC，顶点 A 在以 B、C 为焦点，定长 $AB+AC$ 为长轴的一个椭圆上.

现在的等高线是平行于 BC 的直线，因为在同一直线上的点到 BC 的距离相等，所以与 BC 构成的三角形面积也相等.

这些平行直线与 BC 的距离逐渐增大，在与椭圆相切时，切点 A_0 就是所求的点. 不难看出，此时 $\triangle A_0BC$ 是等腰三角形(图 3·4).

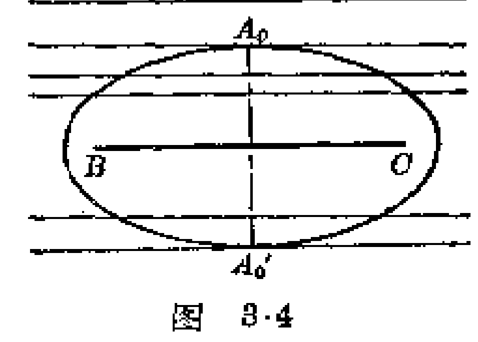


图 3·4

例题 3 与例题 4 是一对“对偶”命题，即将例题 3 的“周长”换成“面积”，“面积”换成“周长”，“最小”换成“最大”，就得

到例题4，反过来也是这样．这类对偶命题如果有一个是正确的，那么另一个也是正确的．

［例题5］ AB 为 $\odot O$ 的弦，在圆周上找一点 P，使 $PA+PB=$ 最大．

解 等高线是以 A、B 为焦点的椭圆，其长轴为 $PA+PB=r$．

当 r 逐渐增大时，椭圆逐渐向外扩张．椭圆与圆有两次相切，第一次在 P_1，第二次在 P_2，由于椭圆的光学性质，在相切时法线（也就是 $\odot O$ 的半径）OP 平分 $\angle APB$，所以切点 P_1、P_2 分别为劣

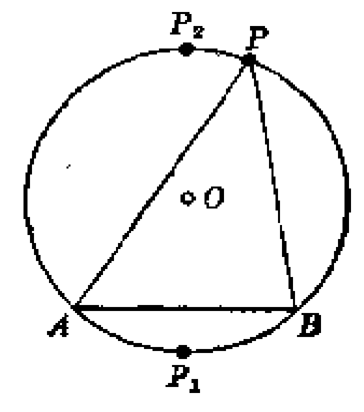


图 3.5

弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与优弧 $\overset{\frown}{AP_2B}$ 的中点，这两个点都是极大点，但 P_1 不是最大，而只是局部极大，即 P_1 比它附近的点（实际上是劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的每一个不同于 P_1 的点）到 A、B 的距离的和大，而 P_2 比圆上所有不同于 P_2 的点到 A、B 的距离的和大．因此答案应取 P_2．

由等高线可以明显地看出 $PA+PB$ 的值的变化情况，即当 P 沿圆周从 B（或 A）变到 P_2（或 P_1）时，$PA+PB$ 逐渐增大．

以上结论都可以用§2例题10与习题二第16题的方法来证明：对于弧 $\overset{\frown}{P_2B}$ 上的任一点 P，延长 AP 到 B'，使 $PB'=PB$，那么 B' 在以 P_2 为圆心，P_2A 为半径的圆上，根据定理VI，$AB'(=PA+PB)$ 随 $\overset{\frown}{BP}$ 的增大而增大，在 P 与 P_2 重合时，AB' 成为 $\odot P_2$ 的直径值最大．其他情况与此类似（当 P 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上时考虑以 P_1 为圆心的圆）．由于 $\overset{\frown}{P_2A}>\overset{\frown}{P_1A}$，所以

$$P_2A+P_2B=2P_2A>2P_1A=P_1A+P_1B,$$

即 $PA+PB$ 在 P_2 处取得最大值，而 P_1 是局部极大．

本题也可以利用三角函数来解，参看习题六第17题.

一般地说，要在平面上的曲线 $f(x,\ y)=0$ 上求出函数 $u(x,\ y)$ 的极值，我们可以先作出曲线族 $u(x,\ y)=C$，这就是等高线（等值线）族. C 由小变大，如果在 $C=C_0$ 时，曲线 $u(x,\ y)=C$ 与 $f(x,\ y)=0$ 相切，那么 C_0 就是所要求的极值.

限于初等几何，本书中出现的等高线只有直线、圆、椭圆这三种形状.

应用等高线法的思想可以改进§1中例题五的结论：

[例题6] 设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，证明：

$$PA+PB+PC\leqslant\max(a+b,\ b+c,\ c+a).$$

其中 a、b、c 表示三角形的边，符号 max 的意义见习题一第17题.

解 作一个以 B、C 为焦点的过 P 点的椭圆，与 AB、AC 分别交于 E、F. 由于椭圆是凸的，P 既不在四边形 $BCEF$ 内，也不在 EF 上，因此 P 在 $\triangle AEF$ 内（图3·6）.

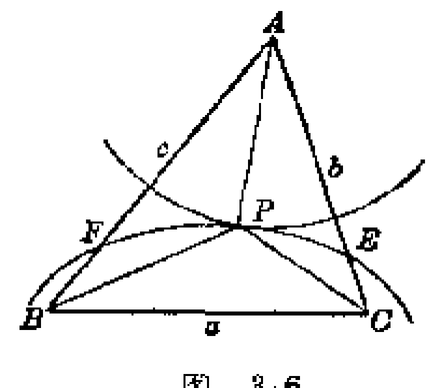


图 3·6

再以 A 为圆心作一个过 P 点的圆. E、F 不会全在 $\odot A$ 内部，否则由于圆是凸的（或习题二第1题. $PA<\max(EA,\ FA)$），P 点也在 $\odot A$ 内部了.

不妨设 E 不在 $\odot A$ 内部，那么

$$EA\geqslant PA,\ EB+EC=PB+PC,$$

所以

$$EA+EB+EC\geqslant PA+PB+PC.$$

但 $EA+EB+EC=EB+AC\leqslant\max(AB,\ BC)+AC$（习题二第1题）$=\max(AC+AB,\ BC+AC)$，

$$\therefore\quad PA+PB+PC\leqslant\max(a+b,\ b+c,\ c+a).$$

下面再介绍另一种找极值的方法——局部调整法.

[例题7] 周长相等的三角形中以正三角形面积为最大.

解 如果在周长为 $2S$ 的所有三角形中 $\triangle A_0B_0C_0$ 的面积为最大，我们固定一条边，比如说 B_0C_0，让第三个顶点 A 变动，但在变动中，和 AB_0+AC_0 保持为定值 $A_0B_0+A_0C_0$ 即 $2S-B_0C_0$（换句话说，A 点在一个椭圆上变动），在这样的 $\triangle AB_0C_0$ 中，$\triangle A_0B_0C_0$ 的面积当然还是最大的，根据例题4，应当有 $A_0B_0=A_0C_0$，即 $\triangle A_0B_0C_0$ 是等腰三角形. 同样（比如说固定边 A_0B_0）可推出等式 $A_0C_0=B_0C_0$，所以 $\triangle A_0B_0C_0$ 是正三角形. 这就证明了周长相等的三角形中，正三角形的面积为最大.

这种方法就叫做局部调整法. 在研究多变量的极值时常常使用这种方法. 它的要点是先假定一些变量是固定的，调整剩下的（个数较少的）变量，看看在什么情况下函数达到极值，然后再综合起来考虑. 由于每次考虑的变量个数比原来的少，这就把问题简化了.

细心的读者可能注意到，上面的解法中用到"如果"二字，也就是说我们预先假定在周长相等的三角形中有一个面积最大的三角形. 这个假定是很要紧的. 但是最大的三角形是不是一定有呢？为什么一定有呢？我们的依据是函数的连续性. 这里的三角形的面积是三条边的连续函数，也就是在三角形的边长作微小变化时，它的面积变化也很小，而连续函数在闭区域上一定取得最大值与最小值，因此如果在边界或临近边界时（我们简称为边界情况或临界情况）函数值不比内部的某个值大（小），那么函数一定在内部取得最大（小）值. 例题7中，$a+b+c$ 为定值 $2S$，$0<a<S$，$0<b<S$，$0<c<S$，所谓临界情形就是有一条边趋于0或 S，这时三角形的面积趋

于零，比内部值小，因此在周长相等的三角形中一定有一个面积最大的.

一般说来，几何中的极值问题往往可以用上述理由，证明所求的极值确实存在. 但这些方法本质上是属于分析的而不是初等的. 因而如果要给出的是严格的初等证明，就不宜用局部调整法.

此外，本书中今后在使用局部调整法时，有时将边界(临界)的情况指明，有时则留给读者自己考虑. 由于几何问题中的极值往往是显然存在的，如果不求严格，则也可以省去对边界情形的讨论.

[例题 8] 面积相等的三角形中以正三角形周长为最小.

解 这是与例题 7 对偶的命题.

假定在面积相等的三角形中以 $\triangle A_0B_0C_0$ 的周长为最小. 固定一条边 B_0C_0，让顶点 A 变动但保持 $\triangle AB_0C_0$ 的面积与 $\triangle A_0B_0C_0$ 的面积相等. 在这样的 $\triangle AB_0C_0$ 中，$\triangle A_0B_0C_0$ 的周长当然还是最小的，由例题 3 应当有 $A_0B_0=A_0C_0$，同样可推出 $A_0C_0=B_0C_0$，即 $\triangle A_0B_0C_0$ 是正三角形.

临界情形是有一条边趋向于 0(这时高趋向于 ∞)或趋向于 ∞，显然这两种情形周长都趋向于 ∞.

不等式与极值的关系是十分密切的，本节的例题和习题都可以改写为不等式. 如例题 7 就是 $\triangle\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$，例题 8 就是 $a+b+c\geqslant 2\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt{\triangle}$，其中 a、b、c 为边长，$\triangle$ 为面积(这两个不等式实际上是同一个不等式，由此也可以看出对偶的命题实际上是同一个命题的不同表现方式).

等高线法与局部调整法是求极值时常用的方法.

等高线法不仅可以帮助我们求出极值，而且可以使我们对函数值的变化状况有一个直观的印象．

局部调整法可以把一个或两个变量的极值问题(不等式)推广到多个变量的极值问题(不等式)．

这些方法不仅可用于几何不等式，也可以移用于证明其它类型的不等式．

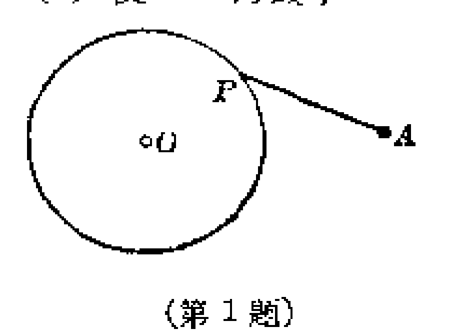
通过这几节，我们已经看到几何图形并不是孤立的、静止的．图形可以从一个位置移到另一个位置，从一种形状变为另一种形状，图形之间有密切的联系．我们应当注意图形的运动、变化以及图形间的联系．

习 题 三

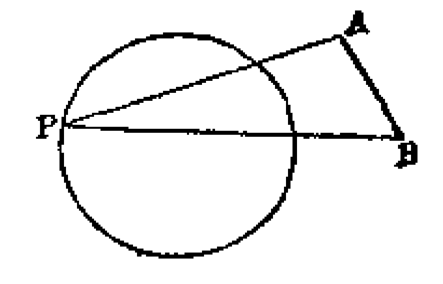
1．A 在 $\odot O$ 外，试在 $\odot O$ 上找一点 P，

(1) 使 AP 为最大

(2) 使 AP 为最小



(第 1 题)



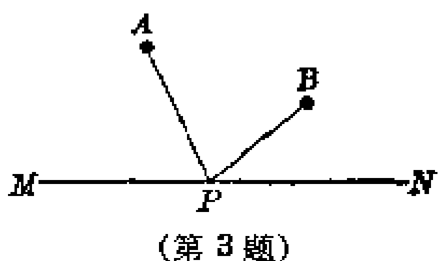
(第 2 题)

2．如图，线段 AB 在 $\odot O$ 外，试在 $\odot O$ 上找一点 P，使 $\triangle PAB$ 面积(1)为最大；(2)为最小．

3．点 A、B 在直线 MN 同侧，试在 MN 上找一点 P，使 $\angle BPA$ 为最大．

4．证明：圆内接三角形中以正三角形周长为最大．

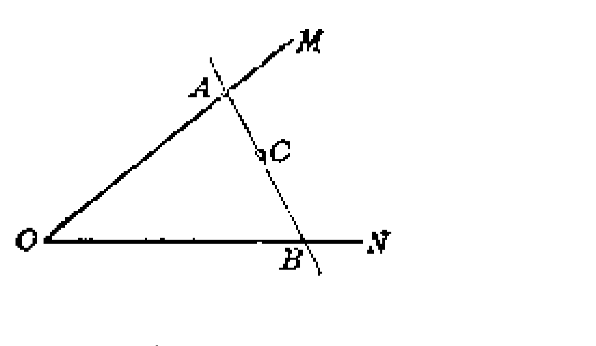
5．证明：圆内接三角形中以正三角形面积为最大．



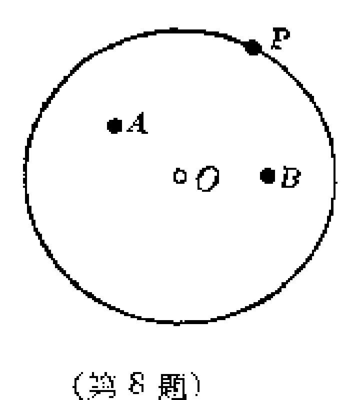
(第 3 题)

6．例题 6 中的 $\max(a+b,\ b+c,\ c+a)$，能否改为任意两边之和？

7．C 在 $\angle MON$ 中，试过 C 作一条直线，交 $\angle MON$ 的两边于 A、B，使 $AC\times CB=$ 最小．



（第 7 题）



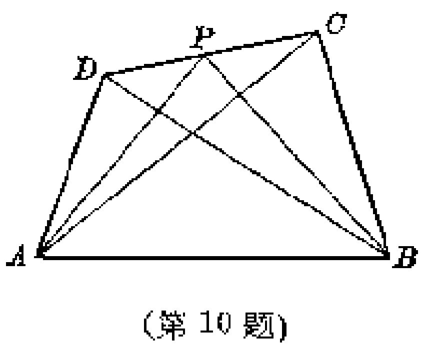
（第 8 题）

8．A、B 为 $\odot O$ 内两个定点，$OA=OB$，试在圆周上找一点 P，使 $PA+PB$ 为

(1) 最大；(2) 最小．

9．利用本节的思想解习题一第 10 题．

10．$ABCD$ 为凸四边形，P 为 CD 上一点，证明：$\triangle PAB$ 的面积在 $\triangle DAB$ 与 $\triangle CAB$ 的面积之间．更确切地说，如果 $\angle A+\angle D>180°$，则



（第 10 题）

$$\triangle DAB \text{ 的面积} < \triangle PAB \text{ 的面积} < \triangle CAB \text{ 的面积}.$$

§ 4　Fermat 问题及 Schwarz 问题

这一节介绍两个著名的问题.

[例题 1]　(Format 问题) 已知 $\triangle ABC$, 找一点 P, 使 $PA+PB+PC$ 为最小.

解　首先证明最小点 P 不会在 $\triangle ABC$ 的外面.

如果 P 在 $\triangle ABC$ 外, 则 P 必在图 4·1 的六个区域之一中(或它们的公共边界上).

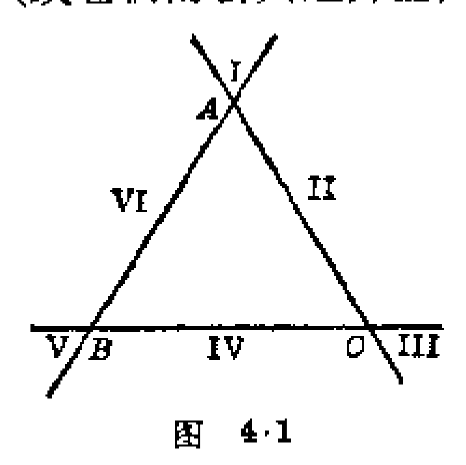


图　4·1

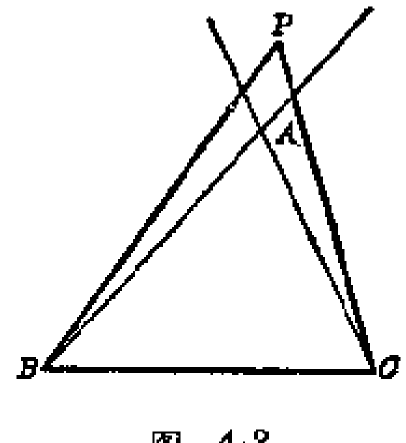


图　4·2

如果 P 在区域 I 中, 那么 A 在 $\triangle PBC$ 中 (图 4·2), 从而 $AB+AC\leqslant PB+PC$(§ 1 例题 1) $<PA+PB+PC$, 即 A 点到三个顶点的距离的和比 P 点到三个顶点的距离的和小.

如果 P 在区域 II 中, 设 PB 交 AC 于 P'(图 4·3), 那么 $P'A+P'B+P'C=P'B+AC<PB+AC<PA+PB+PC$, 即 P' 点到三个顶点的距离的和比 P 点到三个顶点的距离的和小.

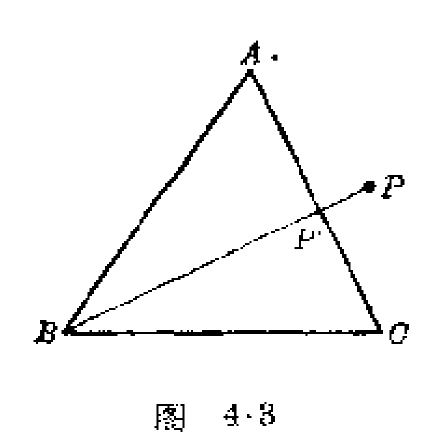


图 4·3

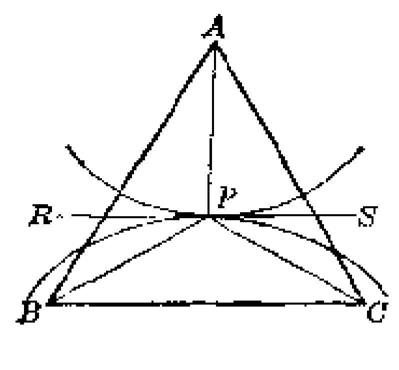


图 4·4

其他情况与此相同.

这样都和 P 点的最小性矛盾. 因此最小点 P 一定在 $\triangle ABC$ 的内部或边上.

解一 我们用§3的方法把 P 点找出来.

假设 P 在三角形内部(注意"内部"是不包括边界的), 如果 PA 为已知, 那么 P 点在以 A 为圆心, PA 为半径的圆上, 并且 $PB+PC=$ 最小.

因此, 我们应当作一个以 B、C 为焦点的椭圆与 $\odot A$ 相切, P 就是切点(图 4·4).

现在看一看切点 P 具有什么样的性质.

设圆与椭圆的公切线为 RS, 由椭圆的光学性质, $\angle BPR=\angle CPS$, 另一方面 $\angle RPA=\angle SPA=90°$,

$$\therefore\quad \angle APB=\angle APC.$$

依照同样的推理, $\angle APC=\angle BPC$,

$$\therefore\quad \angle APB=\angle APC=\angle BPC=120°. \qquad (1)$$

具有性质(1)的点称为 Fermat 点, 要作出 Fermat 点是很容易的, 只要分别以 AB、BC 为底向三角形内作含角为 120° 的弓形弧, 这两个弓形弧在三角形内的交点(如果有的话)就是 Fermat 点.

我们已经证明了如果最小点 P 在三角形内部，那么 P 一定是 Fermat 点.

但是问题并未完全解决，首先在 $\triangle ABC$ 内部不一定有 Fermat 点. 比如说 $A\geqslant 120^\circ$，在 $\triangle ABC$ 内就不存在 Fermat 点. 可以证明一个三角形的内部有 Fermat 点的充分必要条件是每个内角都小于 120°(参看本节习题 4).

暂且假定三角形的内部有 Fermat 点（即每个内角 $<120^\circ$).

即使作了这样的假定，我们还不能断定 $PA+PB+PC$ 一定在三角形内部取得最小值，还要考虑“边界情形”，这里的边界就是三角形的边. 对于锐角三角形，用上面的方法可以证明在边界上不会有最小值(参看本节习题 2). 但在钝角或直角三角形的情况，用上面的方法不能排除在顶点处取最小值的可能性. 因此在这个解法一中，我们仅仅证明了，对锐角三角形，最小点就是 Fermat 点.

但是上面的方法已经启发我们可以有这样目标：设法证明 Fermat 点确实是最小点.

我们将在下面给出这个断言的两个证明，目前仍假定每个内角都小于 120°.

解二 我们需要利用一个简单的引理：

正三角形内任意一点到三边距离的和等于正三角形的高.

这作为一个习题，留给读者自己证明(本节习题 6).

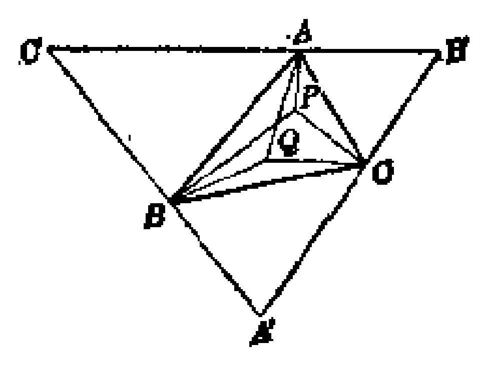


图 4·5

现在设 P 为 Fermat 点(图 4·5)，过 A、B、C 分别作直线与 PA、PB、PC 垂直，这三条直线交成 $\triangle A'B'C'$.

由于 P 为 Fermat 点,

$$\therefore \quad \angle A'=180^\circ-\angle BPC=180^\circ-120^\circ=60^\circ,$$

同样 $\angle B'=\angle C'=60^\circ$, $\therefore \triangle A'B'C'$ 是正三角形, 由引理, $PA+PB+PC=\triangle A'B'C'$ 的高.

对于 $\triangle ABC$ 内部或边上的任一点 Q, 由定理 II 及引理, $QA+QB+QC\geqslant Q$ 到 $\triangle A'B'C'$ 三边距离的和 $=\triangle A'B'C'$ 的高. 等号当且仅当 Q 与 P 重合时才成立.

解三 设 Q 为 $\triangle ABC$ 内部或边上任一点. 把 $\triangle ABC$ 绕 B 点作 60° 的旋转, Q 转到 Q'、A 转到 A'(图 4·6).

$\because \quad \angle QBQ'=60^\circ$, $BQ=BQ'$,

$\therefore \triangle BQQ'$ 是正三角形, $QQ'=QB$.

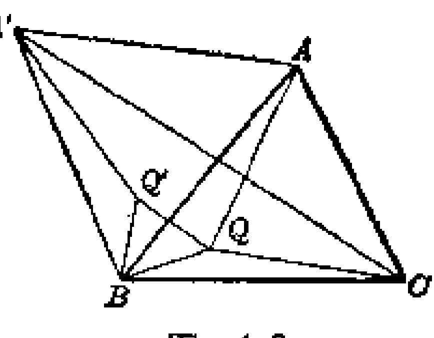


图 4·6

$$QA+QB+QC=Q'A'+QQ'+QC\geqslant A'C.$$

$\because A'$、C 都是定点, $\therefore A'C$ 是 $\sum QA$ 的最小值. 这个值当且仅当 C、Q、Q'、A' 共线时达到.

而在 C、Q、Q'、A' 共线时,

$$\angle CQB=180^\circ-\angle BQQ'=120^\circ,$$

$$\angle AQB=\angle A'Q'B=180^\circ-\angle QQ'B=120^\circ,$$

因此取得最小值的点一定是 Fermat 点.

反过来, 如果 Q 是 Fermat 点,

$$\angle CQB+\angle Q'QB=120^\circ+60^\circ=180^\circ,$$

$\therefore C$、Q、Q' 共线, 同样,

$$\angle A'Q'B+\angle BQ'Q=\angle AQB+\angle BQ'Q$$
$$=120^\circ+60^\circ=180^\circ,$$

$\therefore A'$、Q'、Q 共线, 因此 Fermat 点一定是取得最小值的点.

Fermat 问题还可以利用力学来解.

解四 将这个$\triangle ABC$水平放置，距地面高为h，再在三根长均为l的绳子上面各系一个质量等于m的小球，另一端结在一起，细绳从A、B、C处的小孔穿下去，在合力的作用下达到平衡（设A、B、C处对绳子没有摩擦力），这时绳结的位置P即为所求（图4·7）.

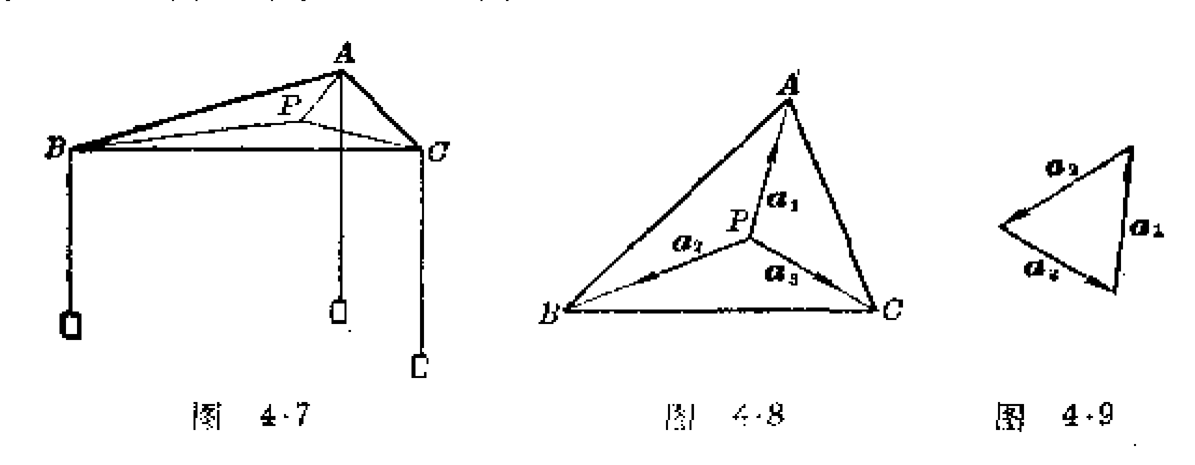


图 4·7　　　　图 4·8　　　　图 4·9

理由是，一方面根据力学的位能最小原理，在平衡时，位能

$$mg[h-(l-PA)]+mg[h-(l-PB)]$$
$$+mg[h-(l-PC)]=\text{最小},$$

即
$$PA+PB+PC=\text{最小}.$$

另一方面根据力学，几个力作用在一点上若该点静止，则这些力的合力为零. 又据力的合成，这三个力$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$成一三角形（图4·8，图4·9）. 因为这三个力大小相等（均等于mg），所以构成的三角形是正三角形，从而

$$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°,$$

这与我们上面得到的结论是一致的.

在三角形内部存在Fermat点时，问题已经解决了. 剩下的问题是有一个内角，比如说$\angle A\geqslant 120°$时最小点在哪里.

如果我们象解法四那样作个试验，就会发现绳结停在A

处，也就是说 A 点是使 $PA+PB+PC$ 最小的点. 这个事实也可以用几何的方法加以证明，比如说解法三只要稍加改变就可以用于这种情况，请读者自己证明.

我们另外再介绍一种对 $A\geqslant120^\circ$ 情况的证法.

设 Q 为 $\triangle ABC$ 内部或边上任一点(图 4·10). 把 BQ 绕 A 点作旋转，使 B 成为 CA 延长线上一点 B'，Q 成为 Q'.

$\because$ 旋转角 $\leqslant60^\circ$，$\therefore Q'Q\leqslant AQ$，

$QA+QB+QC\geqslant QQ'+Q'B'+CQ\geqslant CB'=CA+AB.$

等号在且仅在 Q 与 A 重合时成立.

Fermat 问题有许多推广，比如说 A、B、C 三个村庄各有学生 m_1、m_2、m_3 名，要办一个学校使得所有的学生到这个学校所走的路程的总和为最小，问学校应设在哪里? 换句话说，确定 P 使 $m_1\cdot PA+m_2\cdot PB+m_3\cdot PC=$ 最小.

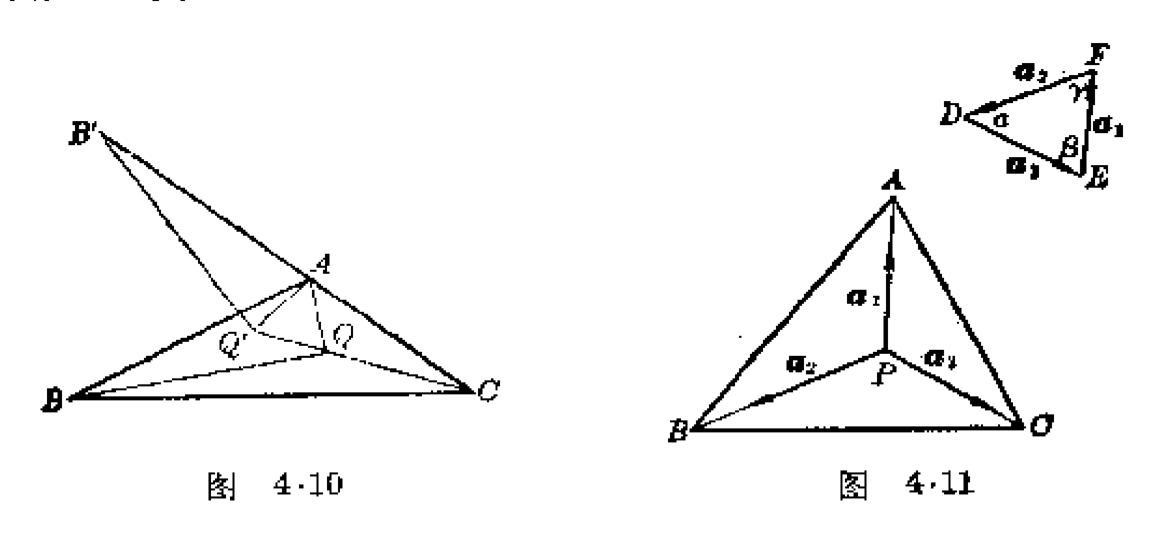


图 4·10　　图 4·11

这个问题也可以用力学的方法解决，只要将前面质量相等的砝码换成质量分别为 m_1、m_2、m_3 的三个砝码，平衡时绳结的位置 P 就是所要求的点. 这时 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ 的合力仍然为零，它们构成一个三角形 DEF(图 4·11)，三条边的大小分别为 m_1、m_2、m_3(或同时乘上一个常数). 设它的三个角分别为 α、β、γ，则

$\angle BPC=\beta+\gamma$, $\angle CPA=\gamma+\alpha$, $\angle APB=\alpha+\beta$.

因为 $\triangle DEF$ 可以确定，$\therefore P$ 点位置也可以用几何的方法确定.

如果 m_1、m_2、m_3 不能构成三角形(如 $m_1+m_2\leqslant m_3$)，那么极值在一个顶点(如 C)达到. 实际上只要 $\alpha+\beta\leqslant C$, 极值就在 C 点达到.

与 Fermat 问题相近的有下面的 Schwarz 问题.

[例题 2] 在锐角三角形 ABC 内作内接三角形 DEF (即三个顶点 D、E、F 分别在三条边 BC、CA、AB 内部)，使 $\triangle DEF$ 的周长为最小.

解 我们还是先设法把这个"最小的"内接三角形找出来，然后再设法证明它确实是最小的(图 4·12).

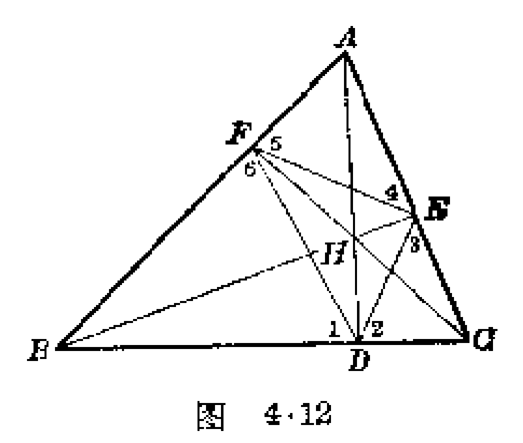


图 4·12

假定 DE 为已知，那么 F 在 AB 上变动，因为 $FE+FD$ = 最小，由 §1 例题 4，我们知道应当有

$$\left.\begin{array}{l}\angle 5=\angle 6\\ \angle 1=\angle 2,\ \angle 3=\angle 4\end{array}\right\}\qquad (2)$$

同理可得

(2) 式是最小三角形必须满足的条件.

这个结论也可以利用光的性质来推导. 设想三条边为三面镜子，如果光的路程为三角形 DEF，那么 $\triangle DEF$ 的周长是最短的，根据反射定律：反射角 = 入射角，立即推出(2).

因此具有性质(2)的三角形 DEF 也称为光线三角形.

现在有三个问题需要解决：

1. 光线三角形是不是一定存在？

2. 光线三角形如果存在，是不是唯一的？

3. 光线三角形是不是最小三角形?

第一个问题很容易解决. 因为我们知道如果 AD、BE、CF 是三条高, H 是垂心, 那么垂足三角形 DEF 就是光线三角形(由于共圆点, $\angle 1=\angle BHF=\angle CHE=\angle 2$). 所以光线三角形是存在的.

反过来, 如果 $\triangle DEF$ 是光线三角形, 那么

$$\because \quad \angle 4+\angle 5+\angle A=180^\circ,$$

$$\therefore \quad \frac{180^\circ-\angle FED}{2}+\frac{180^\circ-\angle EFD}{2}+\angle A=180^\circ,$$

$$\angle A=\frac{\angle EFD+\angle FED}{2}=\frac{180^\circ-\angle EDF}{2}=\angle 2.$$

从而 A、B、D、E 四点共圆.

同理 A、C、D、F 共圆, B、C、E、F 共圆.

$$\therefore \quad \angle EDA=\angle EBA=\angle FCA=\angle FDA,$$

$$\angle FDA+\angle 1=\angle EDA+\angle 2=90^\circ.$$

即 AD 为高, 同理 BE、CF 为高.

所以光线三角形是唯一的, 而且就是垂足三角形, 这就解决了第二个问题.

第三个问题似乎是多余的, 其实不然. 因为我们只证明了如果有最小三角形, 那么它一定是光线三角形. 但是我们还不能断定最小三角形一定存在, 特别是还有"边界情形", 这里的边界情形就是 D、E、F 中至少有一个成为 $\triangle ABC$ 的顶点, 比如说 E、F 均与 A 重合, $\triangle DEF$ 退化为两倍的 AD, 要证明 $2AD>$ 光线三角形的周长并不太容易.

我们解决第三个问题的方法与§1的例题10相似.

设 $\triangle DEF$ 为光线三角形, $\triangle GHI$ 为任一内接三角形.

将 $\triangle ABC$ 连续翻转, 如图4-13所示:

不难看出，$A''B'' \parallel AB$（$\because$ 它们和 $A'B'$ 所成的角都是 $180° - 2\angle ACB$）． $\because$ $A''F' \mathrel{\underline{\parallel}} AF$， $\therefore$ $FF' \mathrel{\underline{\parallel}} AA''$．

同样 $II' \mathrel{\underline{\parallel}} AA''$．

由于光线三角形具有性质(2)，所以 $FF' = 2 \times \triangle DEF$ 的周长．而

$$2 \times \triangle GHI \text{ 的周长} = \text{折线 } IH \cdots I' \geqslant II'$$
$$= 2 \times \triangle DEF \text{ 的周长}.$$

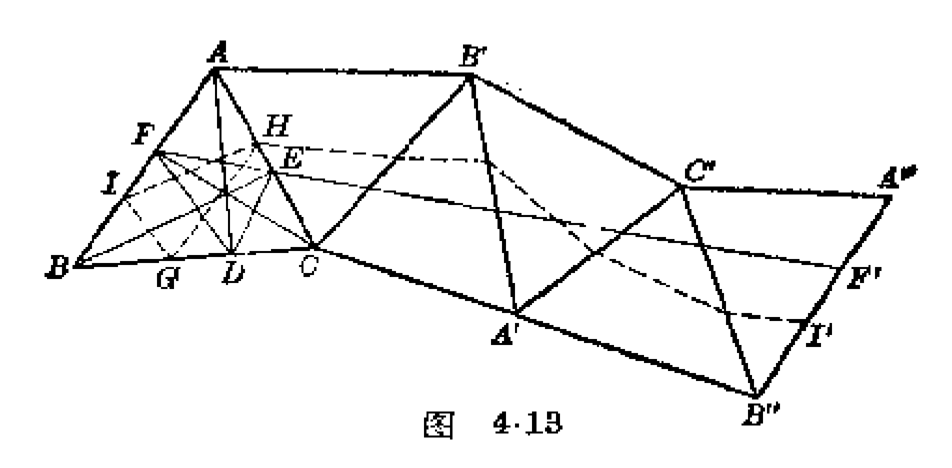


图 4.13

$\therefore$ 光线三角形 DEF 确实是周长最小的内接三角形．

不难看出上面的等号仅在 $\triangle GHI$ 为光线三角形时成立．

§1 的例题 10 显然是本例的特殊情况．

例题 2 中考虑的是锐角三角形．如果 $\triangle ABC$ 不是锐角三角形，那么具有性质(2)的内接三角形不存在．这时最小值在钝角(或直角)三角形的顶点处取得．详细些说，设 A 为最大角(钝角或直角)，AD 为高，$\triangle PQR$ 为任意一个内接三角形，那么

$$\triangle PQR \text{ 的周长} > 2AD. \tag{3}$$

$2AD$ 可以看成一个退化三角形(一边 $AA=0$)的周长，即光从 A 出发，垂直射到镜面 BC 上，再反射回 A 所走过的距离．

(3) 式的证明作为一个习题(本节习题 7)．

Poincaré 曾经提出三个圆的反射问题，即已知三个圆 O_1、O_2、O_3，能否作一个光线三角形 ABC，它的三个顶点分别在三个圆上？他证明了这个问题至少有八个解.

Fermat 问题与 Schwarz 问题是两个著名的问题，有许多应用，这两个问题的解法也是多种多样的. 读者可以比较一下这些解法思想的异同.

反射、旋转等变换前面已经出现过，在这两个问题中它们的作用更为突出. 力学、光学的知识也可以帮助我们找到解答.

我们已经看到，某些问题的解法可以分为两步：先把解找出来，然后再加以证明. 第二步严格的证明固然不可缺少，但是第一步探求答案也非常重要. 借助直观很快地把解找出来(甚至猜出来)，这就使我们第二步可以"有的放矢". 有的时候，在找解的同时也就证明了所找到的确实是问题的解. 当然有时候找出的不是问题的解，我们也要善于用"举反例"的方法将它否定.

习 题 四

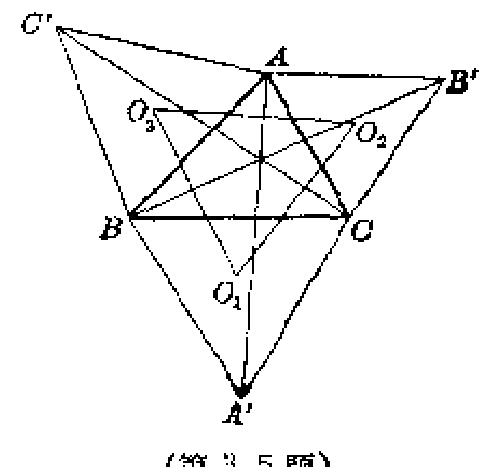
1. P 点在 $\triangle ABC$ 的边上，试确定 P 点的位置，使 $PA+PB+PC$ 为最小.

2. Q 在锐角三角形 ABC 的边上，P 为 Fermat 点，用例题 1 的解法一证明 $QA+QB+QC>PA+PB+PC$.

3. 由 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC、CA 各向外作正三角形 ABC'，BCA'，CAB'. 证明：

(1) $AA'=BB'=CC'$；

(2) AA'、BB'、CC' 交于一点；



(第 3,5 题)

(3) $\odot ABC'$、$\odot BCA'$、$\odot CAB'$ 交于一点.

4. 证明 $\triangle ABC$ 的内部有 Fermat 点的充分必要条件是每个内角都小于 $120°$.

5. 证明 Napoleon 定理：设第 3 题 $\triangle A'BC$、$\triangle B'CA$、$\triangle C'AB$ 的中心分别为 O_1、O_2、O_3，则 $\triangle O_1O_2O_3$ 是正三角形.

6. 证明例题 1 的解法二中的引理.

7. $A \geqslant 90°$, AD 为高，$\triangle PQR$ 为 $\triangle ABC$ 的内接三角形，证明：$\triangle PQR$ 的周长 $> 2AD$.

8. P 为正三角形 ABC 内一点，P 到三边的距离为 PD、PE、PF，证明 $PA+PB+PC \geqslant 2(PD+PE+PF)$.

9. 四个城市 A、B、C、D 恰好是一个正方形的顶点，要造一个公路系统，使得每两个城市都有公路连通. 证明最短的公路系统并不是由对角线 AC 与 BD 构成的.

10. 你能找出上题中的最短公路系统并加以证明吗?

11. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A \geqslant 120°$，D 为 BC 上一点，证明

$$AB+AC \leqslant DA+BC$$

12. 在 $\triangle ABC$ 内部或边上找一点 P，使 P 到三边的距离的和为(1)最小；(2)最大.

§5 代数方法

本书迄今为止所用的都是几何方法.

这一节的证明方法需要进行一些代数运算，可以称作代数方法. 其主要根据是：任意一个实数的平方总不小于零. 从这个简单的事实出发，可以导出许多重要的结果.

首先，对于任意两个实数 A、B，有

$$A^2+B^2-2A\cdot B=(A-B)^2\geqslant 0,$$

$$\therefore\quad A^2+B^2\geqslant 2A\cdot B.$$

由此不难得出：如果 a、$b\geqslant 0$，那么

(1) $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，即两个非负实数的算术平均数不小于它们的几何平均数，其中等号在且仅在 $a=b$ 时成立；

(2) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$；

(3) $\sqrt{2(a^2+b^2)}\geqslant a+b$；

(4) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$. 特别地 $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqslant 4$. $(a\neq 0,\ b\neq 0)$

下面要用到这些结果，特别是(1). (1)～(4)的证明以及等号成立的条件都不难给出，读者可以作为练习，或参见有关不等式的书籍.

[例题 1] 周长相同的矩形中以正方形的面积为最大，面积相同的矩形中以正方形的周长为最小.

解 这又是一对对偶的命题.

如果用 a、b 表示矩形的相邻两边，命题就等价于证明前面的结果(2)和(1).

[例题 2]　直角三角形的周长为定值 $2S$，证明它的面积 $\triangle\leqslant(3-2\sqrt{2})S^2$.

解　用 a、b 表示两条直角边，那么

$$
\begin{aligned}
2S&=a+b+\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}\\
&=(2+\sqrt{2})\sqrt{ab}=(2+\sqrt{2})\sqrt{2\triangle},\\
\therefore\quad \triangle&\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2S}{2+\sqrt{2}}\right)^2=(3-2\sqrt{2})S^2.
\end{aligned}
$$

[例题 3]　如果 a、b、c 为一个三角形的三条边，又 $a'=\sqrt{b^2+c^2}$，$b'=\sqrt{c^2+a^2}$，$c'=\sqrt{b^2+a^2}$. 证明 a'，b'，c' 可以构成一个三角形.

解　三条线段 a、b、c 构成一个三角形的充分必要条件是不等式 $a+b>c$，$a+c>b$，$b+c>a$. 同时成立. 现在

$$
\begin{aligned}
a'^2&=b^2+c^2<(a+c)^2+(b+a)^2\\
&=a^2+b^2+a^2+c^2+2(ab+ac)\\
&\leqslant a^2+b^2+a^2+c^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\\
&=(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2})^2=(b'+c')^2,\\
\therefore\quad a'&<b'+c'.
\end{aligned}
$$

同理可证 $b'<a'+c'$，$c'<a'+b'$. 所以 a'、b'、c' 可以构成一个三角形.

[例题 4]　AB 为 $\odot O$ 的弦，P 为圆周上一点，求 $\dfrac{1}{PA}+\dfrac{1}{PB}$ 的最小值.

图 5·1

解　由 §3 例题 5，我们已经知道在优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 P_0 处（图 5·1），P_0A+P_0B 为最大，即对圆周上任一点 P，都有

$$P_0A+P_0B\geqslant PA+PB.$$

我们证明 $\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}$ 也在 P_0 处取得最小值. 由(4),

$$(PA+PB)\left(\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}\right)\geqslant 4,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}\geqslant\frac{4}{PA+PB}\geqslant\frac{4}{P_0A+P_0B}$$

$$=\frac{4}{2P_0A}=\frac{2}{P_0A}=\frac{1}{P_0A}+\frac{1}{P_0B}$$

[例题 5] $\triangle ABC$ 的周长为 $2s$, 则面积 $\triangle\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{2s}{3}\right)^2$, 也就是 $a+b+c\geqslant 2\sqrt[4]{3^3}\sqrt{\triangle}$. ($a$、$b$、$c$ 为 $\triangle ABC$ 的边), 等号当且仅当 $a=b=c$, 即 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

解 因为 $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, 固定 a, 则 $(s-b)(s-c)$ 在 $b=c$ 时取得最大值(利用 (1) 或例题 1), 所以 $\triangle$ 最大时 $b=c$. 同理 $a=b$. 所以, 周长为定值 $2s$ 的三角形中以正三角形面积为最大(可参看 § 3 例题 7), 从而

$$\triangle\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2s}{3}\right)^2.$$

临界情况为至少有一条边趋向于零或 s, 故面积 $\to 0$.

为了应用方便, 我们再证明一个不等式.

[例题 6] 如果 a、b、c 为非负实数, 证明

(5) $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$. (这是(1)式的推广).

解一 在 $A+B+C\geqslant 0$ 时,

$$A^3+B^3+C^3-3ABC$$
$$=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$$
$$=\frac{1}{2}(A+B+C)[(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2]\geqslant 0.$$

$$\therefore \quad A^3+B^3+C^3 \geqslant 3ABC,$$

令 $A=\sqrt[3]{a}$, $B=\sqrt[3]{b}$, $C=\sqrt[3]{c}$,

即得 $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.

有了(5)式，例题5便可以直接得出来，这只要注意到 $s-a$, $s-b$, $s-c$ 三数之和为定值 $2s$.

我们想解决更一般的问题．先介绍一下凸函数的概念．

设 $f(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上的函数，如果有

(6) $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$,

其中 x_1、x_2 为 $[a, b]$ 中任意两点，$f(x)$ 就称为区间 $[a, b]$ 上的凸函数．

从图5·2上看，(6)就是说 $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 的图象在弦 AB 的上方，并且所形成的弓形是凸的区域(§1例题12).

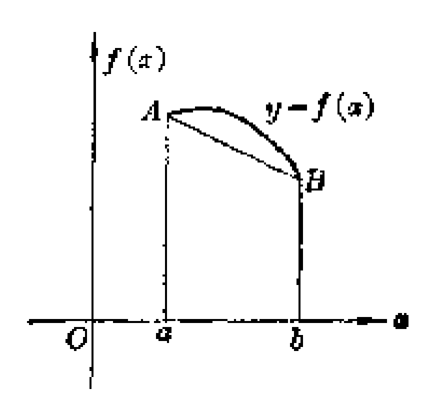


图 5-2

熟悉函数图象的读者可以得出：$y=\log_a x$ $(a>1, x>0)$ 是整个定义域上的凸函数，$y=\sin x$ 是 $[0, \pi]$ 上的凸函数．学过微分学的读者可以根据 $f''(x)<0$ 来证明这些函数的凸性，初等的证明参见本节习题11.

如果 $f(x)$ 是凸函数，即(6)式成立．那么在 x_1+x_2 固定时，$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 在 $x_1=x_2$ 时取得最大值．于是在 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 固定时，运用局部调整法，可以得出

$$\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$$

在 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取得最大值，即

$$\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)) \leqslant f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right).$$

将这个结论应用于 $f(x)=\log_a x(a\geqslant 1,\ x>0)$，便有

$$\frac{1}{n}(\log_a x_1+\log_a x_2+\cdots+\log_a x_n)\leqslant\log\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

即
$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

也就是 n 个正数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 的几何平均数不大于它们的算术平均数.

特别地，令 $n=3$，便得到(5)式.

详细的讨论可参看《平均》一书(史济怀著，人民教育出版社，1964 年版).

[例题 7] λ、μ、ν 为任意实数，a、b、c 为任一三角形的边，$\triangle$ 为这三角形的面积. 证明

$$(\lambda a^2+\mu b^2+\nu c^2)^2\geqslant 16(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)\Delta^2.$$

等号当且仅当 $\lambda:\mu:\nu=b^2+c^2-a^2:c^2+a^2-b^2:a^2+b^2-c^2$ 时成立.

解 这个例题看上去很复杂，其实只要用熟知的配方法就可以解决.

首先 $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

其中
$$s=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

因此
$$\begin{aligned}16\triangle^2&=16s(s-a)(s-b)(s-c)\\&=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}a^2b^2-4\triangle^2&=\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2a^2c^2+2a^2b^2)\\&=\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)^2,\end{aligned}\tag{8}$$

$$a^2c^2-4\triangle^2=\frac{1}{4}(a^2-b^2+c^2)^2.\tag{9}$$

令
$$Q=(\lambda a^2+\mu b^2+\nu c^2)^2-16(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)\triangle^2,$$

Q 是 λ、μ、ν 的二次形式，展开后按 λ 的幂排列并配方后得：

$$
\begin{aligned}
Q &= a^4\lambda^2 + 2\lambda[\mu(a^2b^2-8\triangle^2)+\nu(a^2c^2-8\triangle^2)] \\
&\quad + [\mu^2b^4+\nu^2c^4+2\mu\nu(b^2c^2-8\triangle^2)] \\
&= \frac{1}{a^4}[a^4\lambda+\mu(a^2b^2-8\triangle^2)+\nu(a^2c^2-8\triangle^2)]^2 \\
&\quad + \left\{\mu^2\left[b^4-\frac{(a^2b^2-8\triangle^2)^2}{a^4}\right]\right. \\
&\quad + 2\mu\nu\left[(b^2c^2-8\triangle^2)-\frac{(a^2b^2-8\triangle^2)(a^2c^2-8\triangle^2)}{a^4}\right] \\
&\quad \left. + \nu^2\left[c^4-\frac{(a^2c^2-8\triangle^2)^2}{a^4}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

用(7)，(8)，(9)式代入，则{ }中的式子可化为

$$
\begin{aligned}
&\mu^2\cdot\frac{16\triangle^2(a^2b^2-4\triangle^2)}{a^4}+2\mu\nu\cdot\frac{8\triangle^2(a^2b^2+a^2c^2-a^4-8\triangle^2)}{a^4} \\
&\quad +\nu^2\frac{16\triangle^2(a^2c^2-4\triangle^2)}{a^4} \\
&=\frac{4\triangle^2}{a^4}[(a^2+b^2-c^2)\mu-(c^2+a^2-b^2)\nu]^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad Q &= \frac{1}{a^4}[a^4\lambda+(a^2b^2-8\triangle^2)\mu+(a^2c^2-8\triangle^2)\nu]^2 \\
&\quad +\frac{4\triangle^2}{a^4}[(a^2+b^2-c^2)\mu-(c^2+a^2-b^2)\nu]^2 \\
&= \frac{1}{a^4}\left[a^4\left(\lambda-\nu\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}\right)\right. \\
&\quad \left.+(a^2b^2-8\triangle^2)\left(\mu-\frac{c^2+a^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}\nu\right)\right]^2 \\
&\quad +\frac{4\triangle^2}{a^4}[(a^2+b^2-c^2)\mu-(c^2+a^2-b^2)\nu]^2\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

并且等号在且仅在 $\lambda:\mu:\nu=b^2+c^2-a^2:c^2+a^2-b^2:a^2+b^2-c^2$ 时成立。

上面的配方法称为 Lagrange 配方法.

如果 $b^2+c^2-a^2$, $c^2+a^2-b^2$, $a^2+b^2-c^2$ 中有一个为零，那么相应的参数值(λ、μ、ν 中的一个)可以任意选取.

例题 7 提供了一个强有力的不等式，由它可以推出许多不等式来.

[例题 8] 证明 $abc\geqslant\frac{8\triangle^{3/2}}{3^{3/4}}$, a、b、c、$\triangle$ 的意义同上题(以后如无特别说明都作如此理解).

解 在例题 7 中令 $\lambda a^2=\mu b^2=\nu c^2$ 即得:

$$9\lambda^2a^4\geqslant16\lambda^2a^4\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}\right)\triangle^2,$$

$$\therefore\quad 9a^2b^2c^2\geqslant16(a^2+b^2+c^2)\triangle^2\geqslant16\cdot3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\cdot\triangle^2,$$

$$abc\geqslant\frac{8\triangle^{3/2}}{3^{3/4}}.$$

类似于例题 5, 有下面的例题 9.

[例题 9] 周长一定的四边形中以正方形面积为最大.

解 固定 $\triangle BCD$, 让 A 点变动但保持和 $AB+AD$ 为定长，显然对于面积为最大的四边形 $ABCD$, 一定有 $AB=AD$ (§3 例题 4).

同理，对面积最大的四边形 $ABCD$ 有 $BC=CD=AD$, 即这个四边形是菱形.

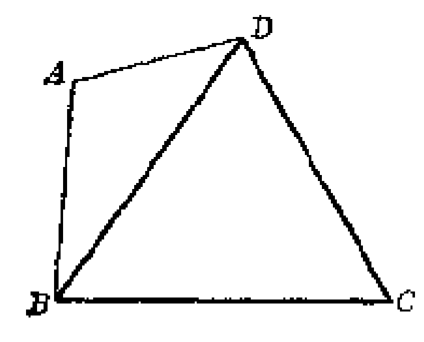


图 5·3

设 BC 边上的高为 AE，显然，菱形 $ABCD$ 的面积 $=BC\times AE\leqslant BC\times AB$. 因此最大的四边形 $ABCD$ 不但是菱形而且应当是正方形.

临界情形：有一边为 0 时，四边形退化为三角形，其中最大的是正三角形，面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2s}{3}\right)^2$，而

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2s}{3}\right)^2<\left(\frac{2s}{4}\right)^2.$$

我们顺便证明了：四边形面积 $\leqslant\left(\frac{2s}{4}\right)^2$，其中 s 为半周长.

例题 5、9 可以推广到 n 边形：

定理 VII 周长一定的 n 边形中，以正 n 边形的面积为最大.

还可以推广到任意形状的闭曲线所围成的图形.

定理 VIII 周长一定的平面闭曲线中，圆所围成的面积为最大.

这是著名的等周问题.

这两个定理我们就不证明了，有兴趣的读者可以参看《等周问题》一书(蔡宗熹著，人民教育出版社，1964 年版). 在习题五中可以找到这两个定理的一些应用.

(1) 式是一个简单但又非常重要的结论((2)、(3)、(4)都是它的变形)，它有各种各样的应用，如例题 1、2、3、4、5. 例题 6 是(1)式的推广.

Lagrange 配方法在证明不等式时也是常用的.

采用代数方法，虽然"几何意味"少了一些，但由于对数量关系作了更加细致的分析，往往可以得到更强的结论，如例题 7 中的不等式以及下节的 Erdös–Mordell 不等式.

在证明有关面积与周长的不等式时，本节末尾的两个定理是很有用的.

习　题　五

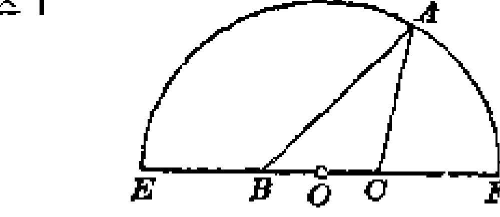
1. 证明本节的(1)、(2)、(3)、(4).

2. 直角三角形的斜边 c 为定长，求面积 $\triangle$ 的最大值.

3. 证明：如果 $\triangle ABC$ 中，$b>c$，则中线 $m_b<m_c$.

4. B、C 三等分半圆直径 EF，A 在这个半圆的圆周上，证明：

$$AB+AC\leqslant\frac{\sqrt{10}}{3}EF.$$



(第4题)

5. 在 $\triangle ABC$ 中，

$$BC=a,\ CA=b,\ AB=c.$$

(1) 证明 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ 可以构成一个三角形；

(2) 如果把(1)中三角形记为 $\triangle A'B'C'$，证明 $\triangle A'B'C'$ 是锐角三角形；

(3) 如果 $\triangle ABC$ 不是等边三角形，证明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 这两个三角形不论它们的边怎样对应都不相似.

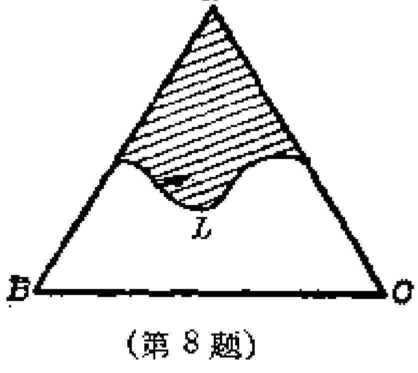
6. 证明 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\triangle$ (Weitzenböck 不等式)，等号什么时候成立?

7. 证明 $h_a+h_b+h_c\geqslant 9r$，其中 h_a、h_b、h_c 分别为边 a、b、c 上的高，r 为内切圆半径.

8. 曲线 L 将正三角形 ABC 分为两个等积的部分，证明：

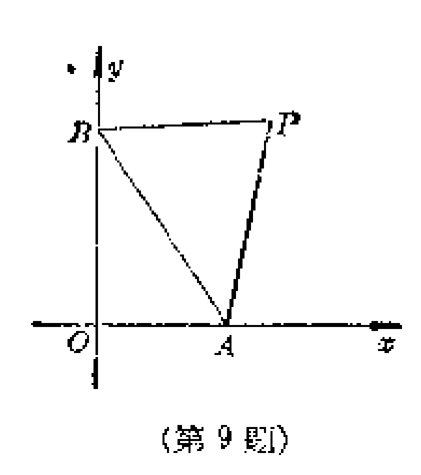
$$l\geqslant\frac{\sqrt{\pi}a}{2\sqrt[4]{3}},$$

其中 l 为 L 的长，a 为正三角形的边长.

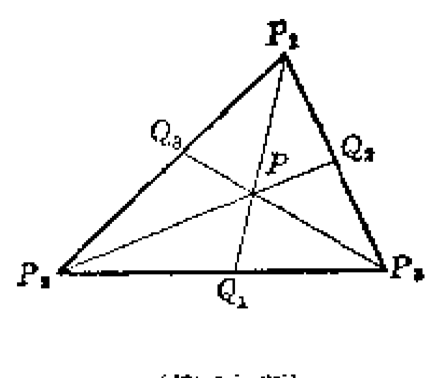


(第8题)

9. $\angle XOY$ 为直角，A、B 分别在 OX、OY 上变动，$PA+PB=$定长 l，什么时候四边形 $AOBP$ 面积最大?



(第 9 题)



(第 10 题)

10. 如图，P 为 $\triangle P_1P_2P_3$ 中一点，P_1P、P_2P、P_3P 延长后分别交 P_2P_3、P_3P_1、P_1P_2 于 Q_1、Q_2、Q_3，证明 $\frac{P_iP}{PQ_i}$($i=1, 2, 3$)中，(1)至少有一个 $\geqslant 2$；(2)至少有一个 $\leqslant 2$.

11. 不依赖图象也不利用导数证明：

(1) $y=\log_a x(a>1)$，在$(0, \infty)$上，

(2) $y=\sin x$ 在$[0, \pi]$上，

(3) $y=\cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上

是凸函数.

12. 证明：$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\right)$(Cauchy 不等式)．特别地：当 $a_i>0$ ($i=1, 2, \cdots, n$)时 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\sum\frac{1}{a_i}\geqslant n^2$.

13. n 个正方形的窗户总面积为 Q 平方米．问窗框的总长最大为多少？

14. a、b、c 为一三角形的三边，$\sigma_1=a+b+c$，$\sigma_2=ab+bc+ca$．证明：$3\sigma_2\leqslant\sigma_1^2<4\sigma_2$.

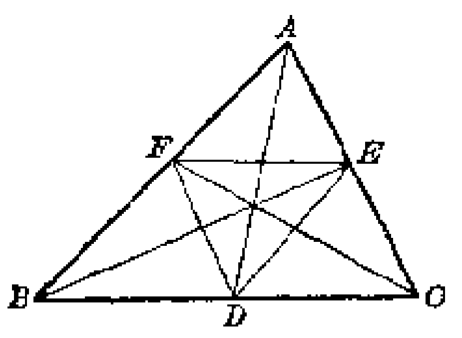
15. 在直角三角形中，r 为内切圆半径，h 为斜边上的高，证明 $0.4<\frac{r}{h}<0.5$.

16. a、b、c 为三角形的三条边，A、B、C 为各边所对的角(用弧度表示)，证明：

$$\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}.$$

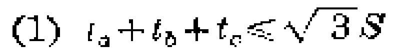
左边的等号什么时候成立？右边的 $\frac{\sigma}{2}$ 能否改为较小的数？

17．在 $\triangle ABC$ 中，AD、BE、CF 为角平分线，证明：$\triangle DEF$ 的面积 $\leqslant \frac{1}{4}$ $\triangle ABC$ 的面积．等号什么时候成立？



（第 17 题）

18．如果 t_a、t_b、t_c 为 $\triangle ABC$ 的三条角平分线，S 为周长 $a+b+c$ 的一半，$\triangle$ 为 $\triangle ABC$ 的面积，证明：



(1) $t_a+t_b+t_c \leqslant \sqrt{3}S$

(2) $t_a^2+t_b^2+t_c^2 \leqslant S^2$

(3) $t_at_bt_c \leqslant S\triangle$

等号在什么时候成立？

$\left(\text{提示：利用角平分线公式 } t_a=\dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcS(S-a)}\right)$

19．设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边分别为 a、b、c 与 a_1、b_1、c_1，面积分别为 $\triangle$ 与 $\triangle_1$，证明关于两个三角形的 Pedoe 不等式：

$$a^2(b_1^2+c_1^2-a_1^2)+b^2(c_1^2+a_1^2-b_1^2)+c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2) \geqslant 16\triangle\cdot\triangle_1$$

等号什么时候成立？

20．$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 中

$$AB=c,\ BC=a,\ CA=b,\ A'B'=c',\ B'C'=a',\ C'A'=b',$$

面积分别为 $\triangle$ 及 $\triangle'$，证明：

$$a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2 \geqslant 16\triangle\triangle'.$$

§6　三角知识的应用

这一节的方法需要用到一些平面三角知识，如两角和与两角差的正、余弦，三角形的正弦定理和余弦定理等．但是我们的目的仍是几何不等式，纯属平面三角的不等式就很少涉及了．

［例题 1］　如果在 $\triangle ABC$ 中，$c\geqslant b$（图 6·1），证明 $h_c\geqslant h_b$.

解一　$h_c=\dfrac{2\triangle}{c}\leqslant\dfrac{2\triangle}{b}=h_b$.

解二　$h_c=b\sin A\leqslant c\sin A=h_b$.

这里的解法与 §2 例题 4 不同，请读者注意比较．

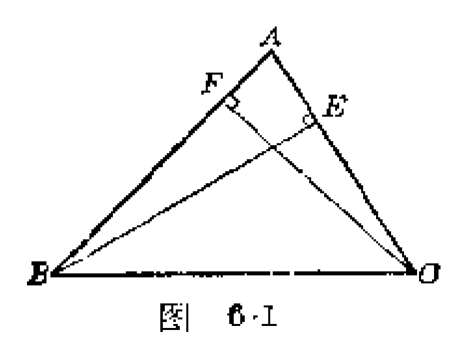


图　6·1

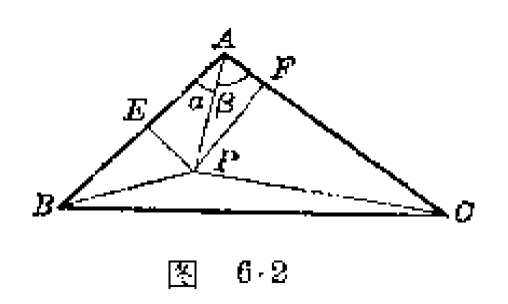


图　6·2

［例题 2］　证明：在 $\triangle ABC$ 中，如果 $c\geqslant b$，那么

$$c+h_c\geqslant b+h_b\quad（参看 §2 例题 8）.$$

解　$c+h_c-(b+h_b)=c+b\sin A-b-c\sin A$

$$=(c-b)(1-\sin A)\geqslant 0.$$

［例题 3］　$\angle A\geqslant 120^\circ$，$P$ 为 $\triangle ABC$ 内一点，证明：

$$PA+PB+PC\geqslant AB+AC\quad（参看 §4 例题 1）.$$

解　设 P 到边 AB、AC 的距离为 PE、PF（图 6·2）．α、β 如图所设．那么

$$PB>BE,\quad PC>CF,$$

$$\begin{aligned}AE+AF&=PA(\cos\alpha+\cos\beta)\\&=PA\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&\leqslant PA\cdot 2\cos 60^\circ\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&=PA\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant PA.\end{aligned}$$

$\therefore\quad PA+PB+PC\geqslant AE+AF+BE+CF=AB+AC.$

注意本题中 E、F 可能有一个在三角形边的延长线上，但并不影响结论.

下面介绍一个著名的不等式.

[例题 4]　P 为 $\triangle ABC$ 内部或边上一点，P 到三边距离为 PD、PE、PF，证明：

$$PA+PB+PC\geqslant 2(PD+PE+PF).$$

解　如图 6·3，记

$PA=x,\ PB=y,$

$PC=z,\ PD=p,$

$PE=q,\ PF=r.$

显然 $\angle DPE=180^\circ-\angle ACB,$

由余弦定理

图 6·3

$$\begin{aligned}DE&=\sqrt{p^2+q^2+2pq\cos C}\\&=\sqrt{p^2+q^2+2pq\sin A\sin B-2pq\cos A\cos B}\\&=\sqrt{(p\sin B+q\sin A)^2+(p\cos B-q\cos A)^2}\\&\geqslant\sqrt{(p\sin B+q\sin A)^2}=p\sin B+q\sin A.\end{aligned}$$

$\because$ P、D、C、E 四点共圆，线段 CP 为这圆的直径，

$$\therefore\quad z=\frac{DE}{\sin C}\geqslant\frac{p\sin B+q\sin A}{\sin C},$$

$$\therefore \quad x+y+z \geqslant \frac{p\sin B+q\sin A}{\sin C}$$

$$+\frac{r\sin B+q\sin C}{\sin A}+\frac{r\sin A+p\sin C}{\sin B}$$

$$=p\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)+q\left(\frac{\sin A}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A}\right)$$

$$+r\left(\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A}\right)$$

$$\geqslant 2(p+q+r).$$

不难看出等号在且仅在 $\triangle ABC$ 为正三角形，并且 P 为三角形的中心时成立.

这个不等式称为Erdös-Mordell不等式，是1935年Erdös提出的，上面的证法是 L. J. Mordell 在1937年给出的，比较简单.

Erdös-Mordell 不等式也是一个很强的不等式，从它可以推出许多不等式来. 习题四第8题就是它的特例.

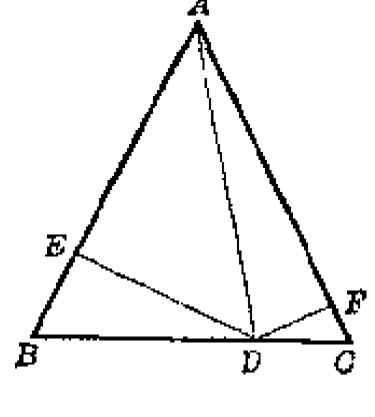


图 6·4

[例题5] $\triangle ABC$ 是等腰三角形，$AB=AC$. D 为底边 BC 上一点，D 到两腰的距离为 DE 及 DF（图6·4）. 证明：

$$\frac{1}{2}(AD+BC)\geqslant DE+DF.$$

解 这是上题 P 点在边上的特殊情况.

[例题6] $\triangle ABC$ 为锐角三角形，证明

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}.$$

解一 取例题 4 中的 P 点为外心 O，显然 $\angle BOD=\angle A$，$OD=R\cos A$ 等(图 6·5)。

由 Erdös Mordell 不等式

$$3R\geqslant 2\cdot(R\cos A+R\cos B+R\cos C),$$

$$\therefore\quad \cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}.$$

等号在且仅在 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

解二 $\cos x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是凸函数，

$$\therefore\quad \cos A+\cos B+\cos C\leqslant 3\cos\frac{A+B+C}{3}$$

$$=3\cos 60^\circ=\frac{3}{2}.$$

这个问题也可以利用局部调整法来解. 其实，本题结论对任意三角形都成立. 见习题六第 15 题.

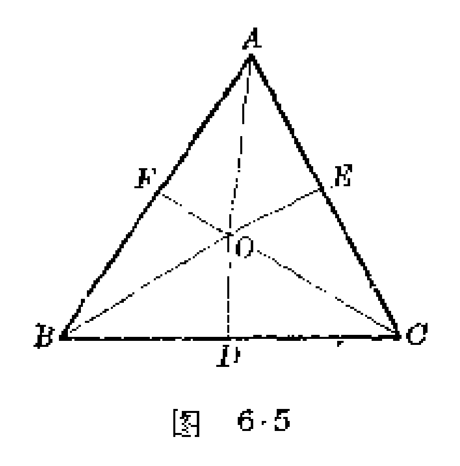


图 6·5

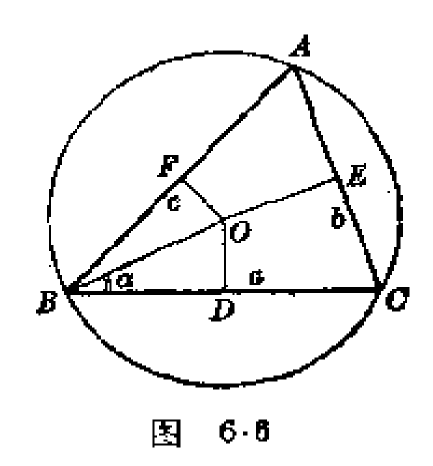


图 6·6

[例题 7] O 为锐角三角形的外心，O 到三边距离分别为 OD、OE、OF.

证明：$a+b+c>2(OD+OE+OF)$.

解一 如图 6·6，$OD=R\sin\alpha<R\sin\angle ABC=\dfrac{b}{2}$(正弦定理)，等等. $\quad\therefore\quad 2(OD+OE+OF)<a+b+c$.

解二 本题即证明在锐角三角形 ABC 中,

$$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C.$$

如图 6·7, 高 AD 在锐角 $\triangle ABC$ 内,

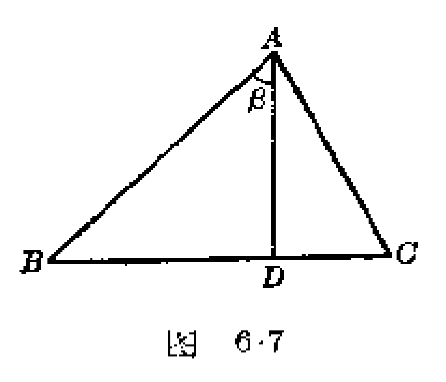


图 6·7

$$\therefore\quad \cos B=\sin\beta<\sin A,$$

等等.

$$\cos A+\cos B+\cos C<\sin A+\sin B+\sin C.$$

解三 由 § 2 例 10 可得 $\sin A+\sin B+\sin C>2$.

由例题 6, $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$,

$$\therefore\quad \cos A+\cos B+\cos C<\sin A+\sin B+\sin C.$$

解四 由 § 1 例 2 可知 $a+b+c>OA+OB+OC$, 再利用 Erdös-Mordell 不等式得 $OA+OB+OC\geqslant 2(OD+OE+OF)$.

$$\therefore\quad a+b+c>2(OD+OE+OF).$$

本题是一个很弱的不等式, 由解法三可知本题可加强为

$$\cos A+\cos B+\cos C+\frac{1}{2}<\sin A+\sin B+\sin C,$$

还可加强为(见习题)

$$\cos A+\cos B+\cos C+1<\sin A+\sin B+\sin C,$$

也可以改进为

$$\sin A+\sin B+\sin C>\frac{2+\sqrt{2}}{2}(\cos A+\cos B+\cos C),$$

即 $$a+b+c>(2+\sqrt{2})(OD+OE+OC).$$

这里的极值是在临界时即 $A\to\frac{\pi}{2}$, $B=C\to\frac{\pi}{4}$ 时达到.

[例题 8] 符号同例题 4, 证明:

$$xyz\geqslant(q+r)(r+p)(p+q).$$

解 如图 6·8, $q=x\sin\alpha$, $r=x\sin\beta$,

$\therefore$ $$q+r=x(\sin\alpha+\sin\beta)$$

$$=2x\sin\frac{A}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\leqslant 2x\sin\frac{A}{2},$$

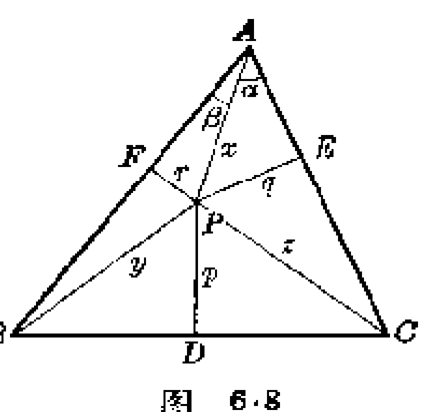


图 6·8

等等.

$\therefore$ $$(q+r)(r+p)(p+q)$$

$$\leqslant\left(2x\sin\frac{A}{2}\right)\left(2y\sin\frac{B}{2}\right)\left(2z\sin\frac{C}{2}\right).$$

现在只要证明 $8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant 1$, 而这是很容易的:

$$2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$

$$\leqslant\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{4}.$$

[例题 9] 证明 $\sqrt{3}(a+b+c)\geqslant 2(h_a+h_b+h_c)$.

解 $(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)=\dfrac{3abc}{2\triangle}(h_a+h_b+h_c)$,

而

$$\frac{abc}{2\triangle}=\frac{abc}{bc\sin A}=\frac{a}{\sin A}=2R.$$

$\therefore$ $$(a+b+c)^2\geqslant 6R(h_a+h_b+h_c).$$

由习题三第 4 题,

$$3\sqrt{3}R\geqslant a+b+c,$$

$\therefore$ $$\sqrt{3}(a+b+c)^2\geqslant 2(a+b+c)(h_a+h_b+h_c),$$

$$\sqrt{3}(a+b+c)\geqslant 2(h_a+h_b+h_c).$$

[例题 10] 设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边长分别为 a、b、c 与 a_1、b_1、c_1，面积分别为 $\triangle$ 与 $\triangle_1$，证明：关于两个三角形的 Pedoe 不等式：

$$a^2(b_1^2+c_1^2-a_1^2)$$
$$+b^2(c_1^2+a_1^2-b_1^2)$$
$$+c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2)$$
$$\geqslant 16\triangle\triangle_1$$

等号什么时候成立？

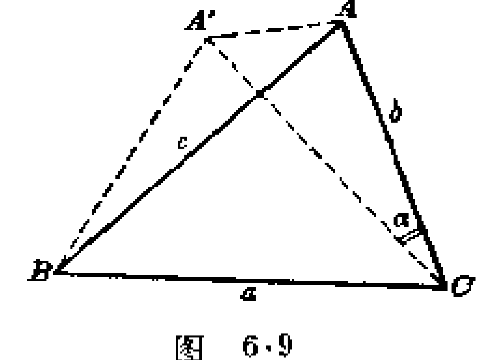


图 6·9

解 以 BC 为边在 A 点同侧作 $\triangle A'BC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，则

$$A'C=\frac{ab_1}{a_1},\quad \alpha=C-C_1.$$

根据余弦定理

$$AA'^2=b^2+\left(\frac{ab_1}{a_1}\right)^2-2b\cdot\frac{ab_1}{a_1}\cos(C-C_1)\geqslant 0,$$

去分母得

$$a_1^2b^2+a^2b_1^2-2aba_1b_1(\cos C\cos C_1+\sin C\sin C_1)\geqslant 0,$$

所以

$$a_1^2b^2+a^2b_1^2-2aba_1b_1\cos C\cos C_1\geqslant 2aba_1b_1\sin C\sin C_1.$$

将
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},\quad \cos C_1=\frac{a_1^2+b_1^2-c_1^2}{2a_1b_1},$$
$$ab\sin C=2\triangle,\quad a_1b_1\sin C_1=2\triangle_1$$

代入上式并化简就得到

$$a^2(b_1^2+c_1^2-a_1^2)+b^2(c_1^2+a_1^2-b_1^2)+c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2)$$
$$\geqslant 16\triangle\triangle_1.$$

显然在且仅在 A' 与 A 两点重合时等式成立，也就是说在且仅在 $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ 时，等式成立.

在 $\triangle A_1B_1C_1$ 为正三角形时，$\triangle_1=\frac{\sqrt{3}}{4}a_1^2$，由 Pedoe 不

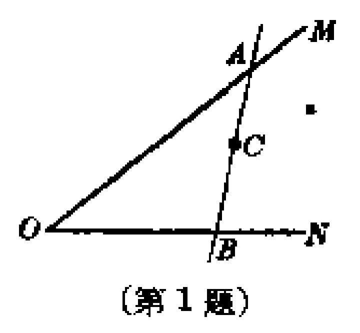
等式得出 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\triangle$，这就是习题五第 6 题的 Weitzenböck 不等式，等号在且仅在 $\triangle ABC$ 是正三角形时成立。

从这两节我们看到，选择适当的参变量可以将几何中的不等式化为代数或三角的不等式．利用代数或三角的运算来证明几何的不等式，也是经常采用的方法。

Erdös–Mordell 不等式是一个很强的不等式，由于 P 点可以在三角形的内部和边上任意选择，三角形的形状又是任意的，所以从 Erdös–Mordell 不等式可以导出许多新的不等式来，在习题六中可以找到一些应用这个不等式的问题．在对线段的符号作适当的约定后，P 点取在三角形外时这个不等式仍可保持成立．这个不等式也可以推广到立体几何中，系数 2 相应地改为 $2^{3/2}$．

习 题 六

1．过 C 点作直线截 $\angle MON$ 的两边于 A、B，使 $CA\times CB$ 为最小．



(第 1 题)

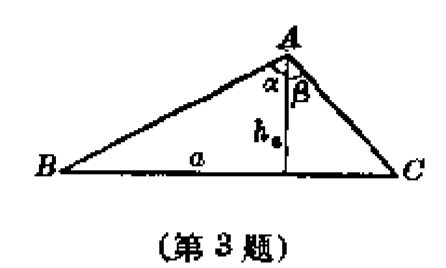
2．在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A\geqslant 120^\circ$，$a>b\geqslant c$，证明：$a\geqslant\sqrt{3}\,c$．

3．在 $\triangle ABC$ 中，A 为钝角，证明：$a>2h_a$．

4．P 为三角形 ABC 内一点，PA，PB，PC 都不小于 1，证明：$\triangle ABC$ 的最大边 $\geqslant\sqrt{3}$．

5．A、B、C、D 四点连成六条线段，证明：最大的线段 $\geqslant\sqrt{2}\times$ 最小的线段．

6．证明：$a+b+c\geqslant 6\sqrt{3}\,r$，其中 r 为内切圆半径．



(第 3 题)

7．证明：四边形面积 $\leqslant\frac{1}{2}\times$ 对角线乘积．

8. 四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 的中点分别为 E、F、G、H. 证明:

$$\text{四边形 } ABCD \text{ 的面积} \leqslant EG\times HF\leqslant \frac{1}{2}(AB+CD)\times\frac{1}{2}(AD+BC).$$

9. 凸 n 边形的边长为 a_1、a_2、…、a_n, 面积为 A. 证明:

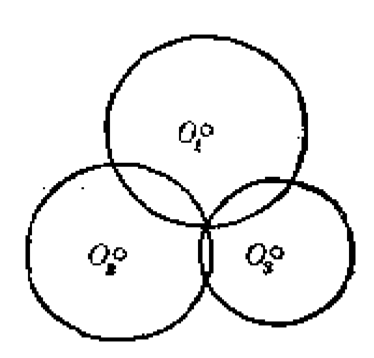
$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant 4A\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}.\quad\text{(习题五第 6 题的推广)}$$

10. 不用上节的例题 7, 证明: $abc\geqslant 8\triangle^{3/2}/3^{3/4}$.

11. 不用 Erdös–Mordell 不等式, 直接解例题 5.

12. I 为 $\triangle ABC$ 的内心, r 为内接圆半径, 证明: $AI+BI+CI\geqslant 6r$.

13. 如图, 三个圆交于一点, 它们的半径分别为 R_1、R_2、R_3, 证明: 公共弦的和 $\leqslant R_1+R_2+R_3$.



(第 13 题)

14. x、y、z 为任意实数, A、B、C 为 $\triangle ABC$ 的角, 证明 $x^2+y^2+z^2-2xy\cos C-2yz\cos A-2zx\cos B\geqslant 0$. 等式何时成立?

15. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,

(1) 直接证明 $\sin A+\sin B+\sin C>2$, 并由此解 § 2 例题 10;

(2) 证明: $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\geqslant\sin A+\sin B+\sin C$;

(3) 证明: $3/2\geqslant\cos A+\cos B+\cos C>1$;

(4) $1<\sin A+\sin B+\sin C-(\cos A+\cos B+\cos C)\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$.

对任意三角形哪些结论仍成立?

16. 符号同例题 4, 证明

(1) $ax\geqslant bq+cr$;

(2) $px+qy+rz\geqslant 2(qr+pr+pq)$;

(3) $xyz\geqslant 8pqr$.

17. 利用三角函数解 § 3 例题 5.

18. 利用三角函数解习题五第 20 题.

§7 杂　例

这一节再介绍一些有关初等几何中不等式的例题.

[例题 1]　一个凸多边形 F 包含在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 内，证明：F 的各边的平方和 $\leqslant 4$.

解　将 F 投影到边 AB 上，设顶点 F_1、F_2、…、F_n 的投影分别为 F_1'、F_2'、…、F_n'.

因为 F 是凸的，$\therefore AB$ 至多被 F 的投影覆盖两次，由于每一次覆盖的所有投影的平方和 $\leqslant$ 这些投影和的平方 $\leqslant 1$，所以

$$F_1'F_2'^2+F_2'F_3'^2+\cdots+F_n'F_1'^2\leqslant 2. \tag{1}$$

同理，将 F 投影到边 BC 上，设顶点的投影为 F_1''、F_2''、…、F_n''，则

$$F_1''F_2''^2+F_2''F_3''^2+\cdots+F_n''F_1''^2\leqslant 2. \tag{2}$$

利用勾股定理，

$$F_iF_{i+1}^2=F_i'F_{i+1}'^2+F_i''F_{i+1}''^2.$$

故由(1)、(2)得

$$F_1F_2^2+F_2F_3^2+\cdots+F_nF_1^2\leqslant 2+2=4.$$

[例题 2]　P 为 $\triangle ABC$ 内一点，延长 AP、BP、CP 分别与 BC、CA、AB 相交于 L、M、N，记 $AP=x$, $BP=y$, $CP=z$, $PL=u$, $PM=v$, $PN=w$（图 7·1），证明：

$$x+y+z>u+v+w.$$

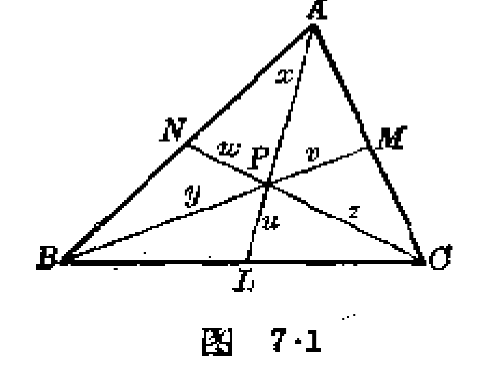


图　7·1

解 根据§1例题2，$x+y+z>\frac{a+b+c}{2}$.

又根据习题二第23题，对最大边a，有$a>u+v+w$.

$$\therefore\quad x+y+z>\frac{a+b+c}{2}>a>u+v+w.$$

[例题3] 符号同上题，证明

(1) $\frac{u}{x+u}+\frac{v}{y+v}+\frac{w}{z+w}=1$;

(2) $\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{w}\geqslant 6$;

(3) $xyz\geqslant 8uvw$.

解 (1) 设$\triangle BCP$、$\triangle CAP$、$\triangle ABP$的面积分别为S_1、S_2、S_3，则$\frac{u}{x+u}=\frac{S_1}{S_1+S_2+S_3}$，故

$$\begin{aligned}&\frac{u}{x+u}+\frac{v}{y+v}+\frac{w}{z+w}\\&=\frac{S_1}{S_1+S_2+S_3}+\frac{S_2}{S_1+S_2+S_3}\\&\quad+\frac{S_3}{S_1+S_2+S_3}=1.\end{aligned}$$

(2) 由前$\frac{x+u}{u}=\frac{S_1+S_2+S_3}{S_1}$等，即得$\frac{x}{u}=\frac{S_2+S_3}{S_1}$等，所以

$$\begin{aligned}\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{w}&=\frac{S_2+S_3}{S_1}+\frac{S_1+S_3}{S_2}+\frac{S_1+S_2}{S_3}\\&=\left(\frac{S_2}{S_1}+\frac{S_1}{S_2}\right)+\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right)+\left(\frac{S_2}{S_3}+\frac{S_3}{S_2}\right)\\&\geqslant 2+2+2=6.\end{aligned}$$

或者利用

$$\left(\frac{u}{x+u}+\frac{v}{y+v}+\frac{w}{z+w}\right)\left(\frac{x+u}{u}+\frac{y+v}{v}+\frac{z+w}{w}\right)\geqslant 9.$$

及(1)得

$$\frac{x+u}{u}+\frac{y+v}{v}+\frac{z+w}{w}\geqslant 9,$$

也可证明.

(3) 由(1),

$$xyz=2uvw+xvw+ywu+zuv.$$

由(2),

$$xvw+ywu+zuv\geqslant 6uvw,$$

$$\therefore\quad xyz\geqslant 8uvw.$$

这里的结果比习题六第16(3)题稍强.

[例题4] 证明长为1的曲线 L 可以用一个面积不超过1/4的矩形盖住.

解 我们先把这样的矩形作出来，然后再证明它的面积不超过1/4.

由于 L 的形状是任意的，要作出一个最小的矩形覆盖 L 还不太容易. 但是我们不难看出，只要矩形一条边的方向(从而所有边的方向)先定下，这个矩形就可以完全确定了，即将平行于这个方向并且把 L 夹在中间的两条直线平行移动，直到这两条直线接触到曲线 L. 这时的直线位置就是矩形的两条边所在位置. 同样可得另两条边的位置.

现在我们来确定最小矩形一条边的方向. 设 L 的端点为 A、B，当 A、B 不重合时，线段 AB 就可以作为矩形一条边的方向. 当 A、B 重合时则可任选.

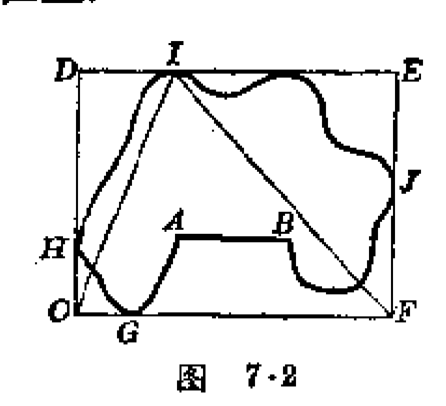


图 7·2

事实上，如图7·2所示我们得

到矩形 $CDEF$，曲线 L 与矩形四边的公共点分别为 G、H、I、J（可能不止一个公共点，但我们只要有一个公共点就够用了），并且不妨设 G 如图 7·2 那样是在曲线弧 AH 上，

则　　矩形 $CDEF$ 的面积 $=2\triangle CIF$ 的面积.

∵　$IH+HC\leqslant$ 曲线弧 IHG，$IJ+JF\leqslant$ 曲线弧 $IJ+$ 曲线弧 $JB+$ 曲线弧 AG，

$$\therefore\quad CI+IF\leqslant IH+HC+IJ+JF$$

$\leqslant$ 曲线弧 $GHI+$ 曲线弧 $IJ+$ 曲线弧 $JB+$ 曲线弧 AG

$\leqslant L$ 的长 $=1$.

$$\therefore\quad \triangle CIF \text{ 的面积} \leqslant \frac{1}{2}CI\times IF$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{CI+IF}{2}\right)^2=\frac{1}{8};$$

∴　矩形 $CDEF$ 的面积 $\leqslant\dfrac{1}{4}$.

［例题 5］　证明圆 I 的外切三角形中，以等边三角形的周长与面积为最小.

解一　设圆 I 半径为 r，外切三角形为 ABC（图 7·3）. 则因为 $\triangle=rs$（s 为半周长）. 故面积 $\triangle$ 为最小与周长 $2s$ 为最小是一致的. 我们采用局部调整法，先固定角 A，设法证明 s 最小时，必有 $\angle B=\angle C$.

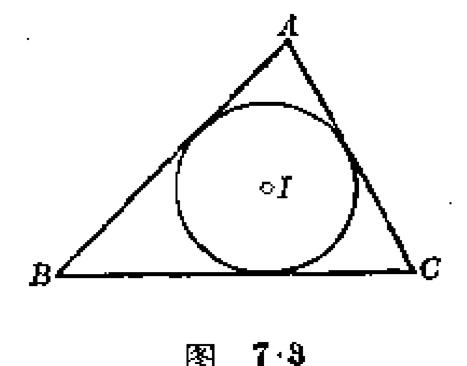


图　7·3

$$\because\quad s=r\operatorname{tg}\frac{A}{2}+r\operatorname{tg}\frac{B}{2}+r\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$=r\operatorname{tg}\frac{A}{2}+r\left(\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\right)$$

$$=r\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}+r\cdot\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=r\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}+r\,\frac{2\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}},$$

可见在 $B=C$ 时，s 的值最小.

因此在 s(从而 $\triangle$)最小时，$A=B=C$. (临界情形是有一个角趋于 0 或 π，从而 s 趋于 ∞，参见图 7·4).

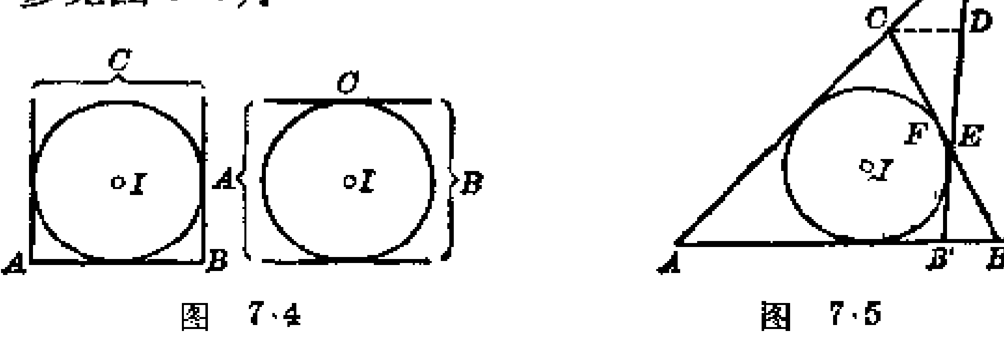


图 7·4　　　　图 7·5

解二　仍用局部调整法，先固定角 A，$\triangle ABC$ 与 $\triangle AB'C'$ 都是 $\odot I$ 的外切三角形，并且 $AB=AC$. 我们证明 $\triangle AB'C'$ 的面积 $\geqslant\triangle ABC$ 的面积就可以了.

B、C 两点不可能全在 $\triangle AB'C'$ 外，否则线段 BC 不可能与 $\triangle AB'C'$ 的内切圆即 $\odot I$ 相切，我们不妨假定 C 在线段 AC' 内，在 $\angle C'CB'$ 内作 $CD\,/\!/\,B'B$ 与 $B'C'$ 相交于 D，又设 $B'C'$ 与 BC 相交于 E，因为 $\odot I$ 是 $\triangle AB'C'$ 的内切圆，所以 BC 的中点即 BC 与 $\odot I$ 的切点 F 一定在 $\triangle AB'C'$ 内，从而有 $EC>FC>EB$，$\triangle CC'E$ 的面积 $\geqslant\triangle CDE$ 的面积 $\geqslant\triangle EB'B$ 的面积，这就证明了 $\triangle AB'C'$ 的面积 $\geqslant\triangle ABC$ 的面积.

解二中用的方法可以称做面积割补法，在证明有关面积的不等式时常常采用这种方法.

由这个例题立即推出$a+b+c\geqslant 6\sqrt{3}r$(习题六第6题)，反过来，由习题六第6题，又得到这个例题的一种解法.

[例题 6]　X、Y、Z分别在$\triangle ABC$的边BC、CA、AB上，并且$BX\leqslant CX$，$CY\leqslant AY$，$AZ\leqslant BZ$. 证明:

$$\triangle XYZ\text{ 的面积}\geqslant \frac{1}{4}\triangle ABC\text{ 的面积}.$$

解　设D、E、F分别为BC、CA、AB的中点，则

$$\because\quad BX\leqslant CX,\quad CY\leqslant AY,$$

$$\therefore\quad \angle YXB+\angle B>\angle EXB+\angle B$$

$>\angle EDB+\angle B=180^\circ$，根据习题三第10题，

$\triangle XYZ$的面积$\geqslant\triangle XYF$的面积.

同理可得

$$\triangle XYF\text{ 的面积}\geqslant\triangle XEF\text{ 的面积}.$$

但　　$\triangle XEF$ 的面积$=\triangle DEF$的面积

$$=\frac{1}{4}\triangle ABC\text{ 的面积}.$$

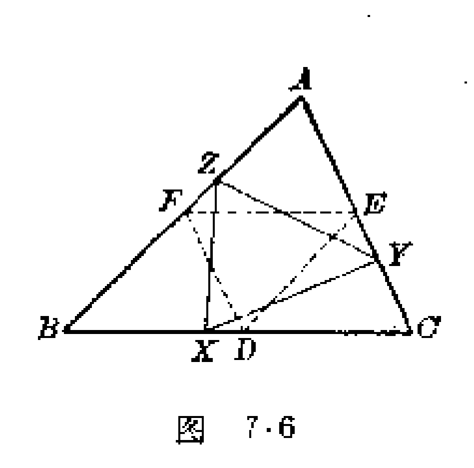


图　7·6

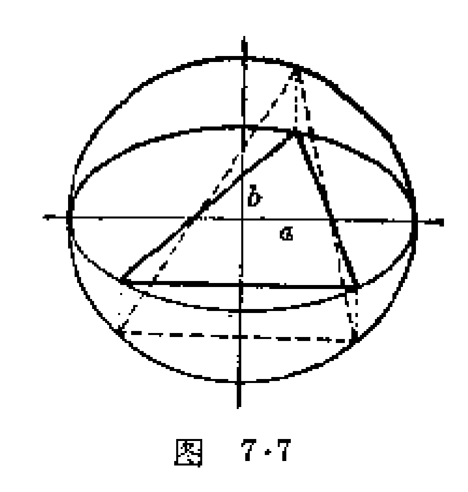


图　7·7

[例题 7]　椭圆的长半轴、短半轴分别为a、b，$\triangle ABC$是这个椭圆的内接三角形，证明:

$$\triangle ABC \text{ 的面积} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}ab.$$

解 由习题三第5题，圆内接三角形的面积$\leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. a为圆的半径.

作"压缩变换"(图7.7)，将这圆压"扁"为长、短半轴分别为a、b的椭圆，这时每个图形的面积都变为原来的$\frac{b}{a}$，故这椭圆的内接三角形的面积$\leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

几何中有各种各样的变换，如平移、旋转、反射、相似、压缩，以及更一般的仿射变换等等，在这些变换下，一个不等式的变化情况是比较容易把握的．下面我们再介绍一下反演变换.

设O为一个定点，$k>0$为一个定长，对任一异于O点的点M，在OM上取一点M'，使$OM\times OM'=k^2$，则点M'称为点M(关于O点)的反演．O称为反演中心，k称为反演半径．把一个图形S的每一点作反演变换，则可以得到一个新的图形S'．S'也叫S的反演.

图 7·8

反演变换有许多有趣的性质，比如说反演变换将圆(或直线)仍变成圆(或直线)，等等.

为了证明例题8，我们先证明一个有用的性质：

设M、N的反演分别为M'、N'，则因为

$$OM\times OM'=ON\times ON'=k^2,$$

故$\triangle OMN \backsim \triangle ON'M'$，且

$$\text{相似比}=\frac{OM'}{ON}=\frac{OM'\times OM}{ON\times OM}=\frac{k^2}{ON\times OM}. \qquad (1)$$

[例题 8]　A、B、C、D 为任意四点，证明：

$$AB\times CD+BC\times AD\geqslant AC\times BD.$$

解　这是习题一的第 16 题，但我们现在利用反演变换来解.

设以 A 为反演中心，1 为反演半径，B、C、D 的反演分别为 B'、C'、D'.

显然 $C'D'+B'C'\geqslant B'D'$，　　　　(2)

由(1)
$$C'D'=\frac{CD}{AC\times AD},$$

$$B'C'=\frac{BC}{AC\times AB},$$

$$B'D'=\frac{BD}{AB\times AD},$$

代入(2)即得

$$\frac{CD}{AC\times AD}+\frac{BC}{AC\times AB}\geqslant\frac{BD}{AB\times AD}.$$

去分母，得

$$AB\times CD+BC\times AD\geqslant AC\times BD.$$

将反演变换应用于§6 例题 4 (Erdös–Mordell 不等式)，可以推出许多新的不等式.

[例题 9]　符号同§6 例题 4，证明：

$$yz+xz+xy\geqslant 2(px+qy+rz).$$

解　设 A、B、C 关于 P 点的反演为 A'、B'、C'，不难看出 P 点也在 $\triangle A'B'C'$ 内.

$\triangle A'B'C'$ 中对应于 a、x、p、… 的各量用 a'、x'、p'、…表示.

则
$$xx'=k^2,$$

$$\frac{p'}{p}=\frac{k^2}{yz}\quad(\text{相似比}).$$

$$\because\quad x'+y'+z'\geqslant 2(p'+q'+r').$$

$$\therefore\quad k^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant 2\left(\frac{k^2p}{yz}+\frac{k^2q}{xz}+\frac{k^2r}{xy}\right).$$

化简即得 $yz+xz+xy\geqslant 2(px+qy+rz)$.

从例题 9 还可以得出更一般的结论:

如果一个不等式是关于 x、y、z、p、q、r (符号设同 Erdös-Mordell 不等式)的齐次式, 那么这个不等式经过变换

$\boldsymbol{V}$: $(x, y, z, p, q, r)\to(yz, zx, xy, px, qy, rz)$

后仍然成立.

还可以证明(证明略去):

关于 x、y、z、p、q、r 的齐次不等式, 经变换

$\boldsymbol{R}$: $(x, y, z, p, q, r)\to(p^{-1}, q^{-1}, r^{-1}, x^{-1}, y^{-1}, z^{-1})$

或

$\boldsymbol{S}$: $(x, y, z, p, q, r)\to(px, qy, rz, qr, rp, pq)$ 后仍然成立.

[例题 10] 证明 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\geqslant 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

解 由 $x+y+z\geqslant 2(p+q+r)$ 经过变换 $\boldsymbol{R}$ 即得

下面的例题是著名的 Sylvester 定理. 这个定理看上去不难, 证起来却并不容易. 它有好几种不同的证法, 但是较简单的证法是巧妙地运用初等几何中的不等式.

[例题 11] 平面上的有限个点, 如果具有这样的性质: 过这些点中任意两个点的直线上都有这些点中的第三个点, 那么这些点一定在同一条直线上.

解 在下面的叙述中, "点"是指命题中所说的那有限个点, "直线"是指过任两"点"的直线.

如果命题不成立，在任一条“直线”外必有“点”．考虑每一条“直线”外的“点”到该“直线”的距离，这些距离都是正的．因为“点”的个数与“直线”的条数都是有限的，所以在这些距离中必有一个最小的正距离 d．设“点” A 到“直线” a 的距离为 d，如果我们能够找到一个“点”到一条“直线”的距离大于零而小于 d，那么就导出矛盾（因为 d 是最小的），从而证明了所有的“点”都在某一条“直线”上，即命题成立．

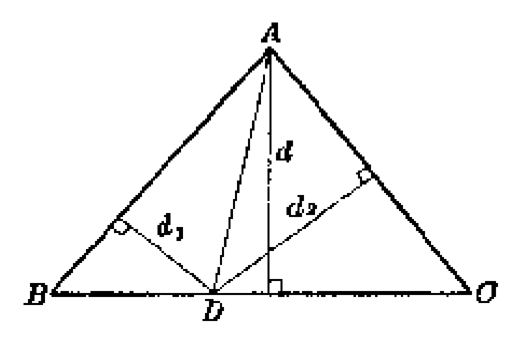


图 7·9

现在我们来找出一点，它到某一条“直线”的距离大于零而小于 d．设“直线” a 上的“点”为 B、D、C，D 在 B、C 之间（图7·9），那么 D 就是我们要找的“点”．事实上，设 D 到“直线” AB 与 AC 的距离分别为 d_1、d_2，如果 $d_1 \geqslant d$，$d_2 \geqslant d$ 同时成立，那么

$$d_1 \times AB + d_2 \times AC \geqslant d \times (AB + AC) > d \times BC,$$

但这个不等式的两边都是 $\triangle ABC$ 的面积的2倍．这个矛盾就说明 $d_1 \geqslant d$，$d_2 \geqslant d$ 不可能同时成立，也就是说 $d_1 < d$ 或者 $d_2 < d$ 必有一个成立．证毕．

Sylvester 定理有各种不同的推广．如设有有限多个点，每三个点不共线，并且过其中任意三点的平面上一定还有这些点中的第四个点，那么这些点一定在同一个平面上．

［例题 12］ 凸闭曲线 Γ 所围成的面积为 S，在 Γ 上任取六个点 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6，则其中必有三个点，以这三个点为顶点的三角形的面积 $\leqslant \frac{1}{6} S$．

解 以 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 中任意三点为顶点作三角形，设其中最小的面积为 m，又设六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的面积为 S'，显然 $S'\leqslant S$，只要能证明 $m\leqslant\frac{1}{6}S'$ 就可以了。

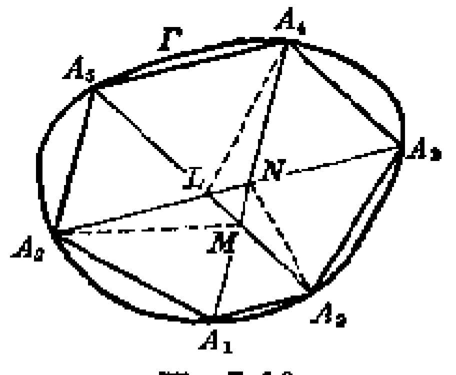


图 7·10

连结 A_1A_4，A_2A_5，A_3A_6，两两相交于 L、M、N(图 7·10)，由于凸性，L、M、N 都在六边形内部. 联接 NA_2，MA_6，LA_4.

由习题三第 10 题，

$$\triangle NA_2A_3 \text{ 的面积}$$
$$\geqslant \min(\triangle A_4A_2A_3 \text{ 的面积}, \triangle A_1A_2A_3 \text{ 的面积}).$$

从而 $\qquad \triangle NA_2A_3$ 的面积 $\geqslant m$.

同理 $\qquad \triangle NA_1A_2$ 的面积 $\geqslant m$,

$\triangle MA_1A_6$ 的面积 $\geqslant m$,

$\triangle MA_5A_6$ 的面积 $\geqslant m$,

$\triangle LA_4A_5$ 的面积 $\geqslant m$,

$\triangle LA_3A_4$ 的面积 $\geqslant m$.

相加得 $\qquad S'-\triangle LMN$ 的面积 $\geqslant 6m$.

更有

$$S'\geqslant 6m, \text{ 即 } m\leqslant\frac{1}{6}S'. \tag{1}$$

更有

$$m\leqslant\frac{1}{6}S. \tag{2}$$

(1)中的等号在且仅在 L、M、N 三点重合，并且 $A_2A_3/\!/A_1A_4/\!/A_5A_6$，$A_1A_2/\!/A_6A_3/\!/A_5A_4$，$A_1A_6/\!/A_2A_5/\!/A_3A_4$ 时取

得.（这样的六边形是正六边形在仿射变换下的象）.

(2) 中的等号在且仅在(1)为等式并且 Γ 就是凸六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 时成立.

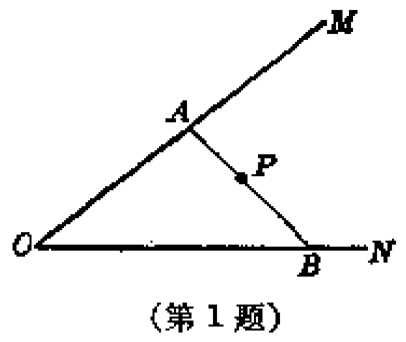
这一节内容较为芜杂. 这在一定程度上也说明了几何中的不等式涉及的范围相当广泛, 问题的解法也千差万别, 虽有一些规律但并无定则. 所以在解这类问题时必须灵活运用各种知识, 对具体的问题进行具体分析.

在解有关面积的不等问题时, 例题5和例题6的方法是值得注意的.

从例题7、8、9、10可以看出, 利用变换可以证明不等式, 也可以产生新的不等式.

习 题 七

1. P 为 $\angle MON$ 内一点, 过 P 作一条直线, 使它与 $\angle MON$ 的两边所构成的三角形面积最小.



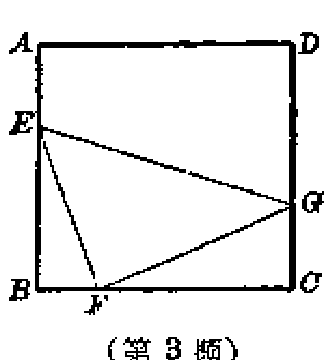
(第 1 题)

2. 过 $\triangle ABC$ 的重心 G 任作一直线, 证明: 这条直线分成的两个部分面积之差 $\leqslant \frac{1}{9}\triangle ABC$ 的面积.

3. $\triangle EFG$ 的顶点分别在正方形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD 上, $AB=1$,

   (1) 证明: $\triangle EFG$ 的面积 $\leqslant \frac{1}{2}$;

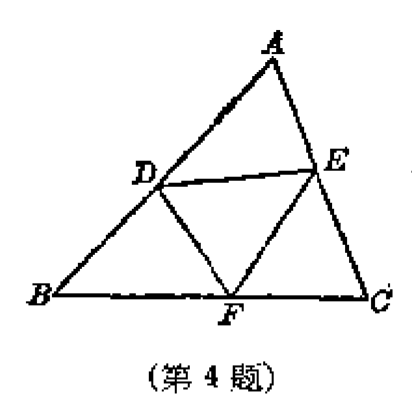
   (2) 求 $\triangle EFG$ 的周长的最大值.



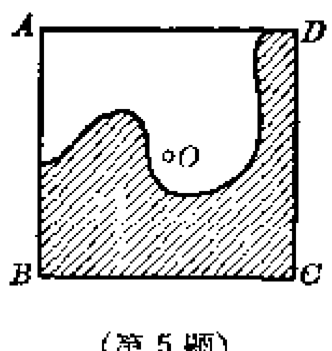
(第 3 题)

4. 将 $\triangle ABC$ 剪成四个三角形(如图), 证明: 中间的一个三角形 $\triangle DEF$ 的面积不会比其余的三个面积都小.

5. 长为 l 的曲线将边长为 1 的正方形分为两个部分, 证明: 不包含正方形中心的那个部分的面积 $S\leqslant l$.



（第 4 题）



（第 5 题）

6. 证明：边长为 1 的正方形不能用两个边长小于 1 的正方形盖住。

7. 例题 2 中已证明 $x+y+z>k(u+v+w)$ 在 $k=1$ 时成立，问 k 能否换成比 1 大的数，比如象 Erdös-Mordell 不等式那样取 $k=2$？

8. 符号同 § 6 例题 4，证明

(1) $px+qy+rz\geqslant 2(qr+pr+pq)$；

(2) $\frac{1}{qr}+\frac{1}{pr}+\frac{1}{pq}\geqslant 2\left(\frac{1}{px}+\frac{1}{qy}+\frac{1}{rz}\right)$；

(3) $\frac{1}{px}+\frac{1}{qy}+\frac{1}{rz}\geqslant 2\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}\right)$.

9. 试由习题六 16(2) 推出 Erdös-Mordell 不等式。

10. 试由 § 6 例题 8 推出两个新的不等式。

11. 符号同 § 6 例题 4，证明 $yz+xz+xy\geqslant 4(pq+pr+qr)$。

12. $\odot O$ 与 $\odot O_1$ 的半径都是 1，且圆心距 $O_1O=1$。A 点在 $\odot O$ 上，B、B_1 在 $\odot O_1$ 上且关于 OO_1 为对称。证明：$AB^2+AB_1^2\geqslant 2$。

13. 在 $\odot O$ 上找三个点 P_1、P_2、P_3，使 $\frac{1}{P_1P_2}+\frac{1}{P_2P_3}+\frac{1}{P_3P_1}$ 为最小。问 $\triangle P_1P_2P_3$ 是什么三角形？试证明之。

14. 设 R、r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径与内切圆半径，证明 $R\geqslant 2r$。

15. 已知凸四边形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 中，$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CD=C'D'$，$\angle ABC>\angle A'B'C'$，$\angle BCD>\angle B'C'D'$，证明：$DA>D'A'$。

16. 已知凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 中，$A_1A_2=A_1'A_2'$，$A_2A_3=A_2'A_3'$，$\cdots$，$A_{n-1}A_n=A_{n-1}'A_n'$，$\angle A_2>\angle A_2'$，$\angle A_3>\angle A_3'$，$\cdots$，$\angle A_{n-1}>\angle A_{n-1}'$ 证明 $A_nA_1>A_n'A_1'$。

17. 将例题 12 中的六个点改为 n 个点，证明：

(1) 在 $n\geqslant 6$ 时，$m\leqslant\frac{1}{n}S$；

(2) 在 $3\leqslant n<6$ 时，$m\leqslant\frac{1}{n-2}S$.

18. L、M、N、L' 为任意四点，O 为线段 LL' 的中点，证明

$$LM^2+MN^2+NL'^2\geqslant OL^2+OM^2+ON^2,$$

等号在且仅在 $MN\perp OL$ 时成立.

19. P 为 $\triangle ABC$ 内一点，D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上并且 PD、PE、PF 分别平分 $\angle BPC$, $\angle CPA$, $\angle APB$, 证明：

$$PA+PB+PC\geqslant 2(PD+PE+PF),$$

等号在且仅在 $\triangle ABC$ 为正三角形并且 P 为三角形的中心时成立.

20. 如果平面上有 n 个点，过每三个点的圆上都还有这 n 个点中的另一个点，证明这 n 个点在同一个圆上(直线算作圆的特殊情况，即半径为 ∞ 的圆).

21. 图中矩形 $ABCD$ 与 $AB'C'D'$ 的长分别为 a、λa, 宽分别为 b、μb, P 在矩形 $ABCD$ 内，Q、R 在矩形 $AB'C'D'$ 内，

证明：

$\triangle PQR$ 的面积 $\leqslant\frac{1}{2}ab(\lambda+\mu-\lambda\mu)$.

(第 21 题)

22. 证明不可能将十个大小相等的正方形放在同一平面上，使得每两个正方形没有公共的内点（即正方形内部的点），并且第一个正方形和其余的九个都接触到.

23. 将一个边长为 1 的正方形分成两个点集，证明必有一个点集的直径不小于 $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ (也就是说这个点集中有两个点，这两点间的距离 $\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{5}$)，并且证明对大于 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 的数，命题不成立.

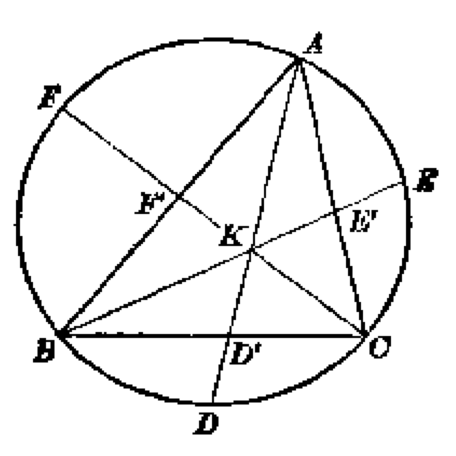
24. E、F、G 为单位正方形 $ABCD$ 内或边上任意三点，证明其中必有一对点的距离 $\leqslant\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

25. A'、B'、C'、D'、E' 是凸五边形各边的中点，证明

$A'B'C'D'E'$ 的面积 $\geqslant \frac{1}{2} \times ABCDE$ 的面积.

26. 如图 K 为 $\triangle ABC$ 的内心，AK、BK、CK 分别与边 BC、CA、AB 相交于 D'、E'、F'，与外接圆相交于 D、E、F. 证明

$$\frac{DD'}{AD'}+\frac{EE'}{BE'}+\frac{FF'}{CF'} \geqslant 1.$$



(第 26 题)

27. $\odot O$ 与 $\odot O_1$ 相交于 P、Q，试过 P 作直线交 $\odot O$ 于 A，交 $\odot O_1$ 于 B，使 $AQ \times QB$ 为最大.

28. 在上题中，要使 $AP \times PB$ 为最大，直线 AB 应如何作?

29. 一个战士想要查遍一个正三角形(包括边)区域内或边界上有无地雷，他的探测器的有效度等于正三角形高的一半. 这个战士从三角形的一个顶点开始探测. 问他循怎样的探测路线才能使查遍整个区域的路程最短.

§8 立体几何中的不等式

这一节介绍一些立体几何中的不等式.

平面几何的许多不等式可以推广到立体几何中. 立体几何中的不等式也往往可以先局限在平面上来探究解法, 或是转化成平面几何的问题来解决.

[例题 1] 图 8·1 中六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的四条对角线之和小于该六面体的 12 条棱之和.

解 §1 的定理 I 也适用于三维空间,

$$\therefore \quad AC_1 < AB + BC + CC_1,$$
$$A_1C < CD + DA + AA_1,$$
$$BD_1 < D_1C_1 + C_1B_1 + B_1B,$$
$$B_1D < A_1B_1 + A_1D_1 + D_1D,$$

相加即得.

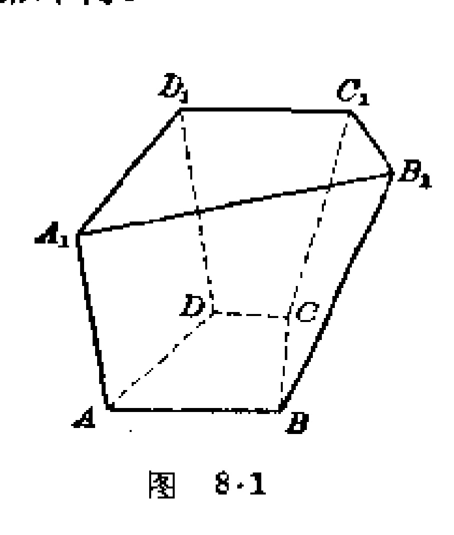


图 8·1

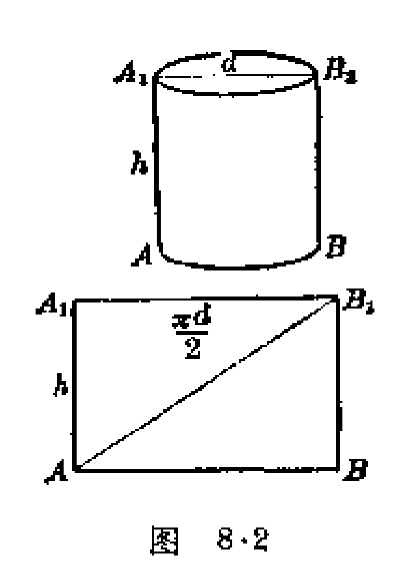


图 8·2

[例题 2] 直圆柱的母线 AA_1 长为 h, 底面直径 $A_1B_1 = d$. 求沿圆柱侧面从 A 到 B_1 的最短路程.

解 直圆柱的侧面可剪开铺在平面上．这样的曲面称为可展曲面．锥面、柱面都是可展曲面，球面不是可展曲面．

可展曲面上的“最短线”（或叫做短程线）是很容易求的．如图 8·2 的半个圆柱面展开后得到一个 $h\times\frac{\pi d}{2}$ 的长方形．从 A 到 B_1 的最短线显然为 $AB_1=\sqrt{h^2+\left(\frac{\pi d}{2}\right)^2}$．它圈在柱面上形成一条“螺旋线”．

在不可展曲面上也可以研究“短程线”（如球面上的短程线是大圆弧），我们这里就不作介绍了．

［例题 3］ A、B、C、D 为空间四点，不在同一平面内，证明：

$$AB\times CD+BC\times AD>AC\times BD.$$

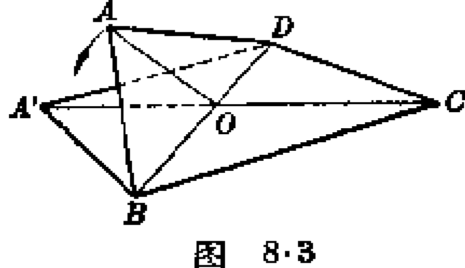


图 8·3

解 将空间四边形 $ABCD$“摊平”，变成平面的四边形 $A'BCD$．说详细些，就是在 $\triangle BCD$ 所在的平面内作 $\triangle A'BD\cong\triangle ABD$，其中 A' 与 C 在 BD 的异侧．

由习题一第 16 题，

$$A'B\times CD+BC\times A'D\geqslant A'C\times BD,$$

即

$$AB\times CD+BC\times AD\geqslant A'C\times BD.$$

设 $A'C$ 与 BD 相交于 O，不难看出 $A'O=AO$．

$$\because\quad A'C=A'O+OC=AO+OC>AC,$$

$$\therefore\quad AB\times CD+BC\times AD>AC\times BD.$$

［例题 4］ P 为四面体 $ABCD$ 内一点，证明：$\frac{1}{3}\sigma<PA+PB+PC+PD<\sigma$，其中 σ 表示四面体的六条棱之和．

解 (1) 显然 $AB<PA+PB$，这样的不等式可以得到六个，全部加起来，其中 PA、PB、PC、PD 各出现三次，

$$\therefore\quad 3(PA+PB+PC+PD)>\sigma,$$

即

$$\frac{1}{3}\sigma<(PA+PB+PC+PD).$$

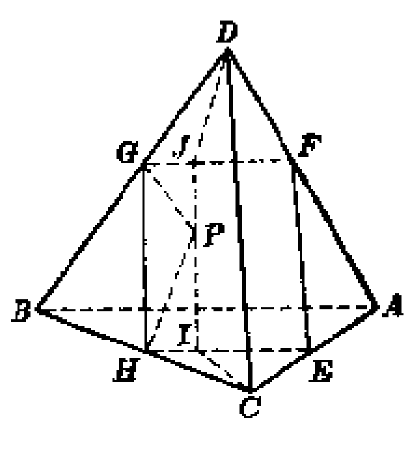


图 8·4

与 §1 例题 2 比较，我们发现从二维空间（平面）推广到三维空间时，系数由 $\frac{1}{2}$ 变为 $\frac{1}{3}$.

(2) 过 P 作平面与 AB 及 CD 平行，这平面与 CA、AD、DB、BC 分别交于 E、F、G、H，易证四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

又设平面 CDP 与平面 $EFGH$ 的交线为 IJ，I 在 EH 上，J 在 GF 上(图 8·4). 显然 $CD>EF=IJ$.

利用习题一第 7 题可知

$$PC+PD<CD+CI+DJ.$$

又由习题二第 1 题可知

$$DJ<DG+DF,\quad CI<CE+CH,$$

$$\therefore\quad PC+PD<CD+DG+DF+CH+CE,$$

同理

$$PA+PB<AB+BG+AF+BH+AE,$$

相加即得

$$PA+PB+PC+PD<\sigma.$$

在利用习题二第 1 题时，我们作出的估计是很宽的. 这启发我们本例题大有改进的余地(比如说，能否将六条棱改为四条棱?)，这个问题将在例题 8 中解决.

[例题 5]　球 O 的半径为 R，球面上有两个点 A、B，曲线 L 以 A、B 为端点并且全部在球 O（包括球面）内．如果 L 的长度 $<2R$，证明：L 一定全部在一个半球（球 O 的一半）内部（或面上）．

解　过 A、B 作大圆 AOB，将 L 投影到平面 AOB 上得曲线 L'．

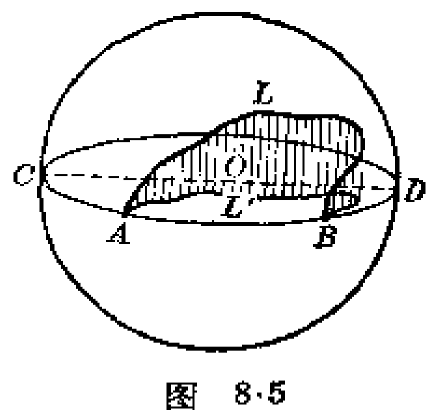


图　8·5

显然 L' 的长 $\leqslant L$ 的长．

由 §1 例题 7 后的一段话可以知道 L' 必定全在一个半圆内．设这半圆直径为 CD，过 CD 作平面与平面 AOB 垂直，显然 L 在这平面截出的半球内．

[例题 6]　多面体任意一个面 S 的面积小于其余各面的面积之和．

解　把其余各面（垂直）投影到面 S 上，这些投影合起来覆盖了整个的 S，因此它们面积的总和 $\geqslant S$ 的面积．但是每个面的面积都不比它的投影小，因此 S 的面积小于其余各面的面积的和．

如果在每个面的法线上作一个向量，它的方向向外，大小等于这个面面积，这样的向量称为面积向量．可以证明一个多面体的面积向量的和等于零，也就是这些向量恰好合成一个空间中的（闭）多边形，而多边形的任一条边的长度显然小于其余各边的长度和，这就是我们所要证明的结果．

我们可以象 §1 那样引进凸多面体和凸体的概念．

如果一个多面体的所有顶点都在它的任一个面的同侧或这个面上，那么这个多面体叫做*凸多面体*．

四面体、立方体都是凸多面体．

圆柱、圆锥、圆台、球、椭球等常见立体都是凸体，它具有

这样的性质：如果两个点 A、B 在这个立体内，那么整个线段 AB 都在这个立体内.

凸多面体都是凸体.

救生圈、正方体上打个洞后剩下的部分都不是凸体.

类似于 § 1 例题 11，可以证明

[例题 7] 如果凸多面体 A 在立体 B 的内部，那么 A 的表面积 $\leqslant B$ 的表面积.

解一 象 § 1 的例题 11 那样，沿着 A 的表面用刀把不属于 A 的部分一块块地削去. 由于例题 6，表面积一次比一次小，这就得到我们所需要的结论.

解二 以 A 的每个面 A_i 为底向外各作一个直棱柱，由于 A 是凸的，这些直棱柱互不相交. B 的表面落入这些直棱柱内的部分记为 B_i，显然 B 的表面积 $\geqslant$ 所有 B_i 的表面积之和 $\geqslant \sum A_i$ 的表面积 $=A$ 的表面积.

§ 1 例题 11 也可用类似解法二的方法来证明.

现在我们来改进例题 4，这里的方法类似于 § 3 例题 6，即利用等高线（在立体几何中则是等值面）.

[例题 8] 条件同例题 4，证明：$PA+PB+PC+PD<$ 从某个顶点引出的三条棱的和.

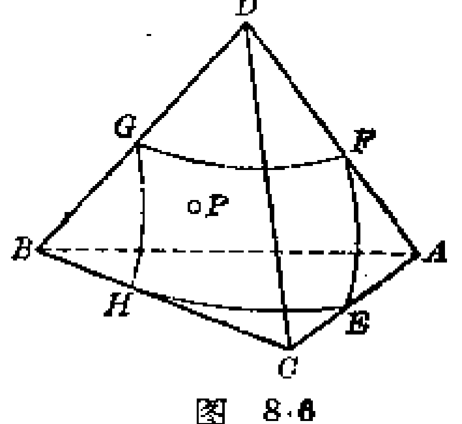


图 8·6

解 到 A、B 两点的距离和为 $PA+PB$ 的点的轨迹是一个椭球面. C、D 两个点不会全在这个椭球内，否则 P 点也在这个椭球内部. 设椭球面截各棱于 E、F、G、H（图 8·6），在 C 或 D 中有一个位于椭球内部时，用 C 或 D 来代替相应的 E、H 或 F、G.

再作一个到 C、D 两点的距离和为 $PC+PD$ 的椭球面. E、F、G、H 中至少有一个在这个椭球的外面，否则由于四面体 $ABCD$ 被分成两个多面体 $ABEFGH$ 和 $CDEFGH$，前者除 E、F、G、H 四点外全部在第一个椭球内部，后者在第二个椭球内部，从而 P 在某个椭圆内部.

不失一般性，设 E 在第二个椭球外面，那么 $EA+EB=PA+PB$，而 $EC+ED>PC+PD$. 这样我们就将 P 点换成棱上的一点 E，只要证明 $EA+EB+EC+ED$ 不大于从某个顶点引出的三条棱的和就可以了.

我们将空间四边形 $ABCD$ 如图 8·7 摊平，E 点必在 $\triangle ABD'$ 或 $\triangle BCD'$ 内部(或边上)，由 §1 例题 1，

$$EB+ED'\leqslant AB+AD'$$

或 $$EB+ED'\leqslant CB+CD',$$

即 $$EB+ED\leqslant AB+AD$$

或 $$EB+ED\leqslant CB+CD,$$

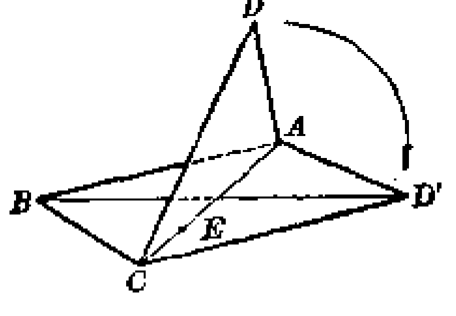


图 8·7

故 $EA+EB+EC+ED$ 不大于从 A (或 C) 引出的三条棱的和. 我们可以看出这里用的方法和习题一第 17 题是完全相同的.

下面的例题相当于 §4 的 Fermat 问题.

[例题 9] P 为四面体 $ABCD$ 内一点，如果 $PA+PB+PC+PD$ 为最小，证明：

$$\angle APB=\angle CPD,$$

$$\angle APC=\angle BPD,$$

$$\angle APD=\angle BPC,$$

并且每对相等的角被同一条直线平分；

解 到 C、D 的距离和等于 $PC+PD$ 的椭球面与到 A、B 的距离和等于 $PA+PB$ 的椭球面在 P 点相切，公切面的法线 EF 平分 $\angle APB$ 与 $\angle CPD$.

以 EF 为轴作一个 $180°$ 的旋转，则射线 PA 与 PB 重合，PC 与 PD 重合，于是 $\angle APC$ 与 $\angle BPD$ 重合．这就证明了 $\angle APC=\angle BPD$．同理可证其它．

图 8·8

[例题 10] $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为空间 n 个点，P 为任一点，G 为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的重心，证明：

$$PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_n^2\geqslant GA_1^2+GA_2^2+\cdots+GA_n^2.$$

解 用 $\boldsymbol{v}_i$ 代表向量 $\overrightarrow{OA_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，$\boldsymbol{v}$ 代表向量 $\overrightarrow{OP}$，$\bar{\boldsymbol{v}}$ 代表向量 $\overrightarrow{OG}$，那么

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{1}{n}\sum\boldsymbol{v}_i,$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\sum_{i=1}^{n}PA_i^2-\sum_{i=1}^{n}GA_i^2\\ &=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(\bar{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{v}_i)^2\\ &=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{v}_i^2+\boldsymbol{v}^2-2\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v})-\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{v}_i^2+\bar{\boldsymbol{v}}^2-2\boldsymbol{v}_i\bar{\boldsymbol{v}})\\ &=n\boldsymbol{v}^2-2\boldsymbol{v}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i-n\bar{\boldsymbol{v}}^2+2\bar{\boldsymbol{v}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i\\ &=n\boldsymbol{v}^2-2\boldsymbol{v}\cdot n\bar{\boldsymbol{v}}-n\bar{\boldsymbol{v}}^2+2n\bar{\boldsymbol{v}}^2\\ &=n(\boldsymbol{v}-\bar{\boldsymbol{v}})^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

这里面的向量乘法是内积．等号在且仅在 P 与 G 重合时成立．

另一种证法是

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(\bar{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{v}_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{v}-\bar{\boldsymbol{v}})(\boldsymbol{v}+\bar{\boldsymbol{v}}-2\boldsymbol{v}_i)$$

$$=(\boldsymbol{v}-\bar{\boldsymbol{v}})\left(n\boldsymbol{v}+n\bar{\boldsymbol{v}}-2\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i\right)=(\boldsymbol{v}-\bar{\boldsymbol{v}})(n\boldsymbol{v}+n\bar{\boldsymbol{v}}-2n\bar{\boldsymbol{v}})$$

$$=n(\boldsymbol{v}-\bar{\boldsymbol{v}})^2\geqslant 0.$$

如果读者不习惯使用向量，也可采用坐标来重写．设

A_i 的坐标为 (x_i, y_i, z_i)，$(i=1, 2, \cdots, n)$；

P 的坐标为 (x, y, z)；

G 的坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$．

那么

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,\ \bar{z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i.$$

$$\sum_{i=1}^{n}PA_i^2-\sum_{i=1}^{n}GA_i^2=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]$$

$$-\sum_{i=1}^{n}[(\bar{x}-x_i)^2+(\bar{y}-y_i)^2+(\bar{z}-z_i)^2]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[(x-\bar{x})(x+\bar{x}-2x_i)+(y-\bar{y})$$

$$\times(y+\bar{y}-2y_i)+(z-\bar{z})(z+\bar{z}-2z_i)]$$

$$=(x-\bar{x})\left(nx+n\bar{x}-2\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$+(y-\bar{y})\left(ny+n\bar{y}-2\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$$

$$+(z-\bar{z})\left(nz+n\bar{z}-2\sum_{i=1}^{n}z_i\right)$$

$$=n(x-\bar{x})^2+n(y-\bar{y})^2+n(z-\bar{z})^2\geqslant 0.$$

例 10 可推广到 n 维空间，证法同上．

［例题 11］ 单位球的球心 O 在它的内接四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内部或面上，证明四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长的和 >6．

解 这是§2例题10的推广．还可以进一步推广为：

n 维空间的单位球的内接单形如果包含球心，那么它的棱长的总和 $>2n$.

先介绍一下单形的概念.

我们知道，如果向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{v}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{v}_2$，那么点 C 在线段 AB 上的充分必要条件是存在非负实数 λ 及 $\mu=1-\lambda$ 使向量

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\boldsymbol{v}_1+\mu\boldsymbol{v}_2. \tag{1}$$

线段就是一维的单形.

在平面（二维空间）里，单形就是三角形．和(1)类似，如果 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{v}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{v}_2$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{v}_3$，那么点 D 在 $\triangle ABC$ 内部或边上的充要条件是存在非负实数 λ、μ、ν，使

$$\overrightarrow{OD}=\lambda\boldsymbol{v}_1+\mu\boldsymbol{v}_2+\nu\boldsymbol{v}_3,$$

且

$$\lambda+\mu+\nu=1 \tag{2}$$

在三维空间里，单形就是四面体．设 $\overrightarrow{OA_i}=\boldsymbol{v}_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ 那么点 C 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内部或边上的充要条件是存在一组实数 $\lambda_i(i=1, 2, 3, 4)$，使

$$\overrightarrow{OC}=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\boldsymbol{v}_i,$$

且

$$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i=1,\ \lambda_i\geqslant 0, \tag{3}$$

换句话说，四面体 $A_1A_2A_3A_4$（三维单形）就是满足(3)式的点 C 所成的集合.

在一般情形（n 维空间），只要让 i 取 $n+1$ 个值：1, 2, …, n, $n+1$，由满足(3)式的点所成的集合就是 n 维空间的以 $A_i(i=1, 2, \cdots, n+1)$ 为顶点的单形.

我们现在来证明例11．注意到向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度 $|\boldsymbol{v}|$ 与内积

有 $|\boldsymbol{v}|^2=\boldsymbol{v}^2$ 的关系，又因为是单位球，故如设 $\overrightarrow{OA_i}=\boldsymbol{v}_i$，则

$$|\boldsymbol{v}_i| = \sqrt{\boldsymbol{v}_i^2}=1. \tag{4}$$

由于 O 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内部或面上，故存在 $\lambda_i\geqslant 0$ $(i=1, 2, 3, 4)$，$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i=1$，且使

$$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\boldsymbol{v}_i=0. \tag{5}$$

对 $\lambda_1\boldsymbol{v}_1=-\lambda_2\boldsymbol{v}_2-\lambda_3\boldsymbol{v}_3-\lambda_4\boldsymbol{v}_4$ 两边取长度并利用三角不等式得：

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= |\lambda_1\boldsymbol{v}_1|\leqslant|-\lambda_2\boldsymbol{v}_2|+|-\lambda_3\boldsymbol{v}_3|+|-\lambda_4\boldsymbol{v}_4|\\ &=\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1-\lambda_1.\end{aligned}$$

故得

$\lambda_1\leqslant\frac{1}{2}$. 同理 $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\leqslant\frac{1}{2}$.

由(5)易得 $\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{v}_i=\sum_{i=1}^{4}(1-2\lambda_i)\boldsymbol{v}_i$. 于是

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{v}_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{4}(1-2\lambda_i)\boldsymbol{v}_i\right|\\ &\leqslant\sum_{i=1}^{4}(1-2\lambda_i)=4-2=2.\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\text{六条棱的平方和} &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j)^2\\ &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(2-2\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j)\\ &=12-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j\\ &=12+4-\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{v}_i^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j\\ &=16-\left(\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{v}_i\right)^2\geqslant 16-2^2=12.\end{aligned}$$

其中最后一个不等号用到 (6). 另一方面，由于任一条棱长 $|v_i-v_j|\leqslant$ 直径 $=2$, 故

$$(v_i-v_j)^2=|v_i-v_j|^2\leqslant 2|v_i-v_j|. \qquad (7)$$

$$\therefore \quad \text{六条棱的和}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}|v_i-v_j|$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(v_i-v_j)^2\geqslant 6.$$

由于(7)式的等号不能对所有 i、j 都成立，故该不等式是严格的.

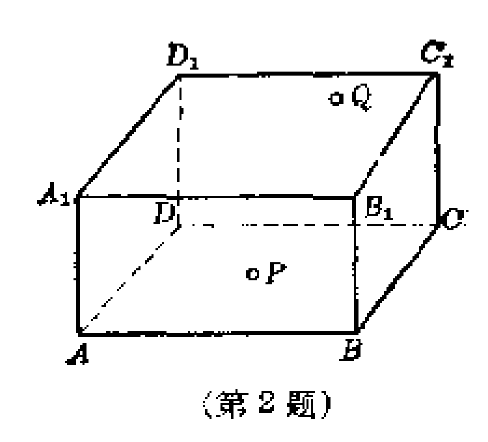
这个证明也适用于 n 维空间.

本节的例题几乎全是由平面几何的不等式推广来的，大多数例题的解法与相应的平面几何不等式的解法类似，或者可以化为平面几何的不等式. 但由于平面几何、立体几何又各有特点，所以有些证法迥然不同（如本节例题 11 与 §2 例题 10）. 我们当然希望找到普遍适用的证法，以便更好地揭示出一般的规律.

几何不等式的内容是很丰富的，虽然在本书中我们也注意到不等式的加强、改进与推广，但有许多问题还可以作进一步的推广，有许多重要的不等式(例如关于凸体的许多不等式)，还完全没有接触到. 数学总是不断发展的，原来的问题解决了，又有层出不穷的新问题在前头. 即使是初等数学，也还是值得我们不断地再学习、再探索，这样将有助于深化我们对整个数学的认识.

习 题 八

1. 四面体的任意两条对棱的和小于其余四条棱的和.
2. 图中 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 为长方体，P 在矩形 $ABCD$ 内，Q 在矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 内，试在 BCC_1B_1 内求一点 R，使 $RP+RQ$ 为最小.



（第 2 题）

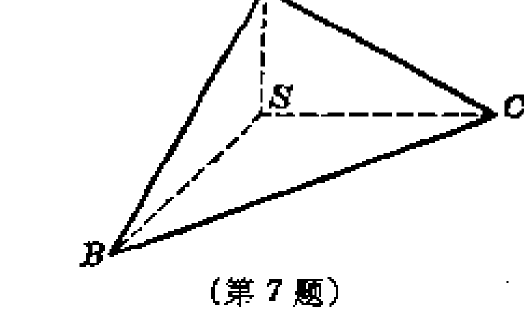
3. 如果在上题的 A 点有一只蜘蛛，C_1 处有一只苍蝇，蜘蛛要尽快地到达 C_1 点捕获苍蝇，它应当沿哪条路爬？最短路程是多长？（假定 AB、AD、AA_1 的长分别为 a、b、c，且 $a\geqslant b\geqslant c$）。

4. 已知 $\triangle ABC$，试求一点 P（不限定在 $\triangle ABC$ 所在平面内），使 $PA+PB+PC=$最小。

5. 证明长为 $4l$ 的空间曲线一定可以包含在一个半径为 l 的球内。

6. A、B 两点在球面上，试在球面上找一点 C，使 $CA+CB$ 为最大。

7. 如图，四面体 $SABC$ 在 S 处的三个面角都是直角，六条棱的总和为 l，证明这个四面体的体积 $V\leqslant\frac{5\sqrt{2}-7}{162}l^3$。



（第 7 题）

8. 证明球内接四面体中以正四面体体积为最大。

9. 椭球的三个半轴的长分别为 a、b、c，四面体 $ABCD$ 内接于这个椭球。证明：$ABCD$ 的体积 $\leqslant\frac{8}{9\sqrt{3}}abc$。

10. P 为四面体 $ABCD$ 内一点，问

(1) $PA+PB+PC<DA+DB+DC$ 是否一定成立？

(2) 已知

$$PA+PB+PC+PD<k(AB+BC+CA+AD+BD+CD)$$

在 $k\geqslant1$ 时成立（例题 4），在 $k<1$，比如说 $k=\frac{2}{3}$ 时是否一定成立？

(3) 同样，例题 4 中的 $\frac{1}{3}$ 能否换成较大的数?

11. 试利用本节例题 11 中的(1)式来解习题一第 17 题.

12. 下面的命题是否正确? 如果正确，加以证明. 如果不正确，试举出反例:

(1) C 为闭曲线，C' 为包含 C 的最小凸曲线，则 C' 的长 $\leqslant C$ 的长.

(2) S 为闭曲面，S' 为包含 S 的最小凸曲面，则 S' 的面积 $\leqslant S$ 的面积.

13. O 为正四面体 $ABCD$ 的外心，P 为正四面体 $ABCD$ 内任意一点，证明 PA、PB、PC、PD 中一定有不小于 OA 的，也一定有不大于 OA 的.

14. 在正四面体 $ABCD$ 的表面 P 处 (P 不是四面体的顶点) 有一只蚂蚁，要绕四面体一周，每个面都恰好爬过一次，最后回到 P 处，证明它的最短的爬行路线是一个矩形，并且全长等于正四面体 $ABCD$ 的棱长的两倍.

15. 证明: 任何四面体总有一个顶点，以这点出发的三条棱为三边可以作成一个三角形.

16. 设 O 为正四面体 $ABCD$ 的中心(即外接球的球心)，P 为任意一点，证明 $OA+OB+OC+OD\leqslant PA+PB+PC+PD$

17. 一个四面体恰有一条棱比 1 大，证明该四面体的体积 $V\leqslant\frac{1}{8}$. 如果一个三角形恰有一条边比 1 大，这个三角形的面积 S 最大是多少?

18. P、Q 在正四面体 $ABCD$ 内部，证明: $\angle PAQ<60°$.

19. A、B、C、D 是空间中四点，求证:

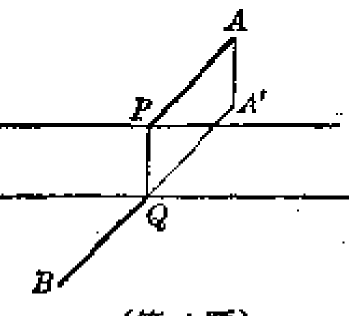
$$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2\geqslant AB^2+CD^2.$$

习题解答概要

习题一解答

1. $AD = AO + OF \geqslant AF \geqslant AO - OF = AC$

2. 设一边为 a，另一边为 $2a$，则第三边 $> 2a - a = a$，而 $< 2a + a = 3a$，∴ a 即是最小边并且周长 S 在 $a + a + 2a = 4a$ 与 $a + 2a + 3a = 6a$ 之间。

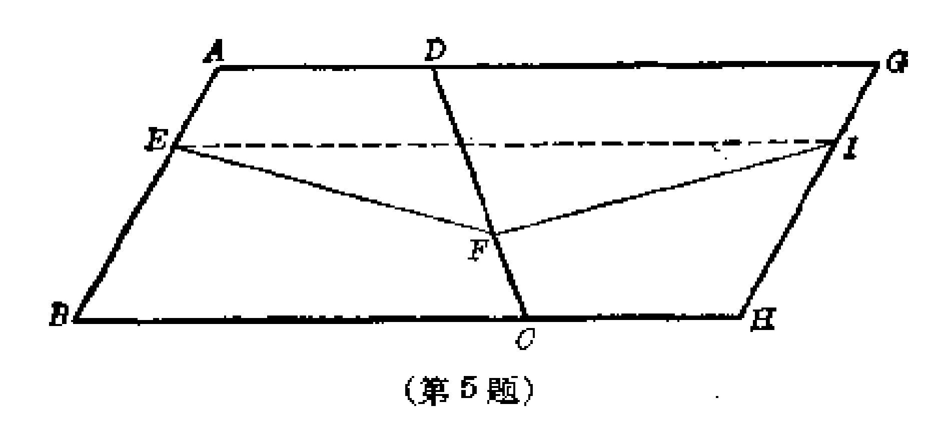


(第 4 题)

3. 若 A、B 在 MN 同侧，直线 AB 与 MN 的交点 S 即为所求。若 A、B 在 MN 异侧，先作 B 关于 MN 的对称点 B'，再求出 AB' 与 MN 的交点 S。

4. 先作 AA' 与河岸垂直并且长度与河宽相等。连结 $A'B$ 与河岸的交点即是 Q。

5. 如图，再作一个与 $ABCD$ 全等的梯形 $CDGH$，拼成一个平行四边形 $ABHG$。



(第 5 题)

$$2EF = EF + FI \geqslant EI = AG = AD + BC.$$

6. 本题即上题 A、D 两点重合的特殊情况。

7. $PC + PD \leqslant PB + BC + PA + AD = AB + BC + AD < CD + BC + AD$.

8．未必．例如将 A、B、D 固定，令 $C\to\infty$，P 取在 C 邻近．

9．不可，如固定 B、C，令 $A\to\infty$，P 取在 A 邻近，即知 $PA+PB+PC<k(AB+BC+CA)$，$k<1$ 不成立．又固定 B、C，令 $A\to BC$ 上某个点，即知 $PA+PB+PC>k(AB+BC+CA)$，$k>\frac{1}{2}$ 不成立．

10．仿照例题 5，并利用例题 1．

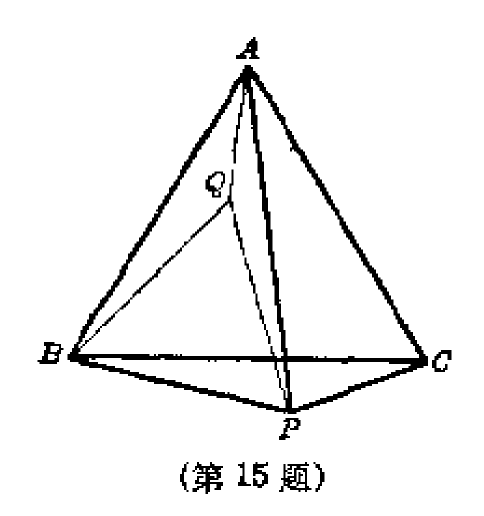
11．取对角线 BD 中点 G，$EF\leqslant EG+GF=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}(AB+CD)$．同理 $EF\geqslant\frac{1}{2}|AB-CD|$．

12．能，参看例 9．

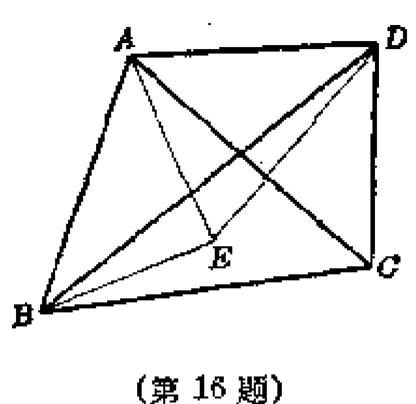
13．作中线 BD，过 E 作 $EQ\parallel AC$ 交 BD 于 Q，$\frac{EG}{GF}=\frac{QG}{GD}\leqslant\frac{BG}{GD}=2$．

14．对四边形 $ABCD$ 有 $AC<AB+BC$ 及 $AC<AD+CD$，$\therefore AC<\frac{1}{2}\times$周长．同样 $BD<\frac{1}{2}\times$周长，两式相加即得．一般地，约定 $A_{n+j}=A_j$，$\sum\limits_{i=1}^{n}A_iA_{i+k}\leqslant A_1A_2\cdots A_n$ 的周长 $\times k\left(0\leqslant k<\frac{n}{2}\right)$ 等号仅在 $k=0$、1 时成立．如果 n 是偶数，$\sum\limits_{i=1}^{n}A_iA_{i+\frac{n}{2}}<A_1A_2\cdots A_n$ 的周长 $\times\frac{n}{4}$．

15．绕 B 点旋转 60°，BC 成为 BA，BP 成为 BQ，PC 成为 QA，$PB+PC=BQ+QA=PQ+QA\geqslant PA$．



（第 15 题）



（第 16 题）

16．先将 $\triangle ACD$ 绕 A 旋转使 AC 落到 AB 上，再作相似变换，使点 C 与点 B 重合．设 AD 经这样变换后成为 AE，那么 $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$(1)，

$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD}$ (2)，由 (1) 及 $\angle BAC=\angle EAD$ 得 $\triangle BAC\backsim\triangle EAD$，

$\therefore \frac{BC}{ED}=\frac{AC}{AD}$(3)，将(1)、(3)代入 $EB+ED\geqslant BD$ 中即得.（这证明适用于任意四边形）

等号在且仅在 $ABCD$ 为圆内接四边形时成立.

上一题是本题的特殊情况(在 $AB\times CD+BC\times AD\geqslant AC\times BD$ 的两边约去 $AB=BC=AC$ 即得).

17. 以 CD 为对称轴，翻转 $\triangle ACD$ 得 $\triangle A'CD$，则 E 在四边形 $A'CBD$ 内，从而 E 在 $\triangle A'BD$ 或 $\triangle A'BC$ 的内部(也可能在边 $A'B$ 上)，由例题 1，$EA'+EB\leqslant\max(DA'+DB,\ CA'+CB)$ 即 $EA+EB\leqslant\max(r_1,\ r_2)$. 不难看出，对于任意四边形 $ABCD$ 结论同样成立. 于是如果 C、D 两点在以 A、B 为焦点的椭圆内，那么线段 CD 上任一点 E 均在这个椭圆内. 即椭圆是凸的.

或者先假定 E_0 为 CD 的中点，由例题 8，

$$E_0A<\frac{1}{2}(AC+AD),\ E_0B<\frac{1}{2}(BC+BD)$$

相加得

$$\begin{aligned}E_0A+E_0B&<\frac{1}{2}(AC+AD+BC+BD)\\&=\frac{1}{2}[(AC+BC)+(AD+BD)]\\&=\frac{1}{2}(r_1+r_2)\leqslant\max(r_1,\ r_2).\end{aligned}$$

同样可得 E_0C 的中点 E_1 及 ED 的中点 E_2 也满足相应的不等式 $E_iA+E_iB\leqslant\max(r_1,\ r_2)$.

如此下去可以得到一个稠密的点集：$E_0,\ E_1,\ E_2,\ \cdots$，满足上面的不等式.

利用极限可知 $EA+EB\leqslant\max(r_1,\ r_2)$ 对 CD 上任一点 E 均成立.

第三种解法是注意到圆压缩后变为椭圆，而在压缩变换下凸性保持不变，因此只要证明圆是凸的就可以了，这就是习题二第 1 题.

第 10 题显然是本题的特殊情况.

习题二解答

1. $\because$ $\angle ADB$、$\angle ADC$ 中必有一个 $\geqslant 90°$. 本题是习题一第 17 题的特殊情况.

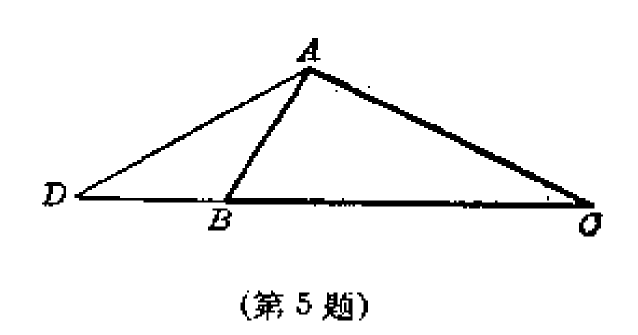
2. 利用 §1 例题 8 的解法即可知 $\angle 2 > \angle 1$. 由定理 IV, 可知 $\angle 3 > \angle 4$.

3. 证明 $\angle BAE < \angle BAD < \angle BAF$, 或证明 $BE < BD < BF$, 或结合起来证明.

4. (1) 将 DA 平移至 CA', 然后应用定理 III.

(2) 仿照例题 5. 或将 DB 平移至 CB', AD 平移至 CA'. AC 在 AB 上的射影 $AC' = AA' + A'C' = CD + A'C'$, $B'C$ 的射影 $B'C' = B'B + BC' = CD + BC'$. 而 $A'C$ 的射影 $A'C' > BC$ 的射影 BC'.

5. 延长 CB 到 D, 使 $BD = BA$. $\because$ $AC \geqslant 2AB > AD$, $\therefore$ $\angle ADB > \angle C$, 即 $\frac{1}{2}\angle ABC > \angle C$.

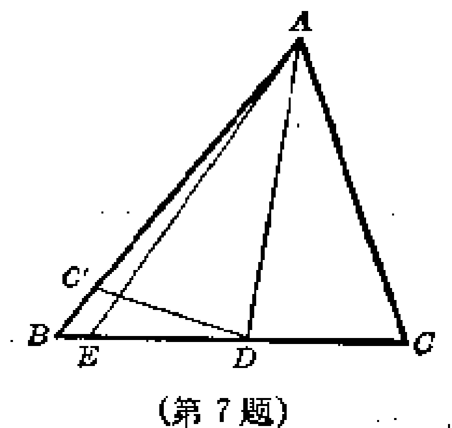


(第 5 题)

6. 参看例题 3.

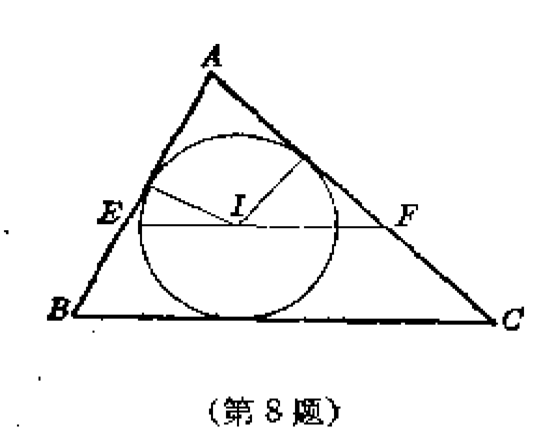
7. (1) 在 AB 上取 $AC' = AC$, 则 $\angle BC'D = 180° - \angle C > \angle B$, $\therefore$ $BD > DC' = DC$. 或利用 $BD : DC = AB : AC$.

(2) 在 BD 上取 E, 使 $DE = DC$, 则由 §1 例题 8 及习题二第 1, 题 $AD < \frac{1}{2} \times (AE + AC) < \frac{1}{2}(AB + AC)$.

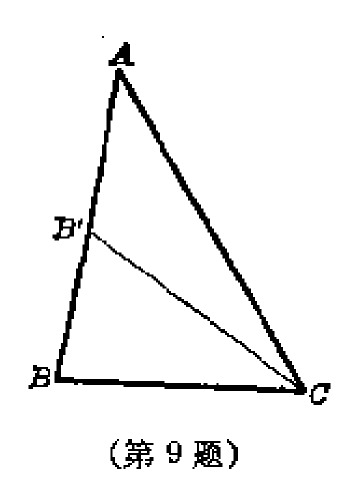


(第 7 题)

8. 过内心 I 作平行于 BC 的直线, 与 AB、AC 分别交于 E、F, 则 BC



（第 8 题）

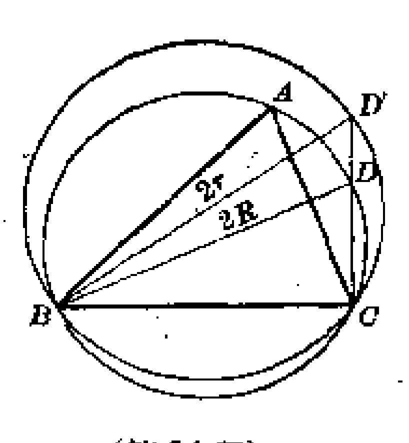


（第 9 题）

$>EF=EI+IF>2\times\odot I$ 半径.

9. 不一定. 我们不难作出上图，其中 $CB'>CB$，将 $\angle A$，边 AC 微微缩小成 $\angle A'$，边 $A'C'$，仍然可以有 $C'B'>CB$.

10. 不一定有 $CE'>CF$. 比如说作一个 $\triangle FCB$，其中 $\angle FCB$ 为钝角并且 $CF>BC$，延长 BF 到 A 使 $FA=BF$，则 $AB>AC$. 根据第 1 题即知 $CE'<CF$.



（第 10 题）

11. 参看 §6 例题 1. 或以 BC 为直径作圆，再利用定理 VI.

12. 设 O 为外接圆心，则半径 OA、OB、OC 把 $\triangle ABC$ 分成三个部分，不妨设 P 在 $\triangle OAB$ 内（或边上），由 §1 例题 1，$PA+PB<OA+OB=2OA$，于是 $PA<OA$ 与 $PB<OA$ 必有一个成立.

13. OC 是 $\triangle OAD$ 的中线，利用第 2 题.

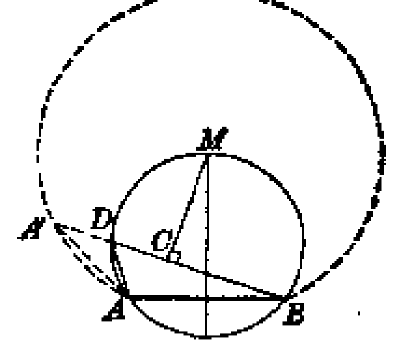
14. 由 §1 例 9 存在一个半径 $r\leqslant\frac{1}{4}\times(a+b+c)$ 的圆覆盖这个三角形，利用平移与旋转总可以使两个顶点，比如 B、C 在这圆的圆周上，顶点 A 在圆内或圆周上，不难证明 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R\leqslant r$（比如

（第 14 题）

说，我们可以得到两个直角三角形，斜边分别为 $2R$ 与 $2r$，一条直角边为 BC，BC 所对的角分别为 $\angle D$ 与 $\angle D'$ 而 $\angle D=\angle A>\angle D'$，由此可知 D' 在线段 CD 的延长线上，从而 $BD<BD'$．也可以利用三角函数来证明．)

这里我们顺便证明了锐角三角形的覆盖圆中直径最小的一个应是它的外接圆．

15．仿照例题 7．D 在等腰三角形外的情况也可以用同样的方法讨论．



(第 16 题)

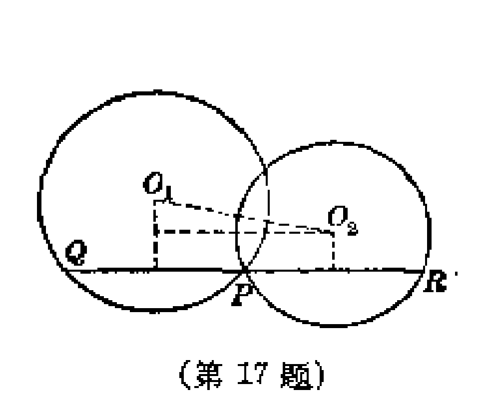
16．只要证明 (2)．延长 BD 到 A'，使 $DA'=DA$（"化直"），

$\because\ \angle AA'D=\frac{1}{2}\angle ADB=\frac{1}{2}\angle AMB$,

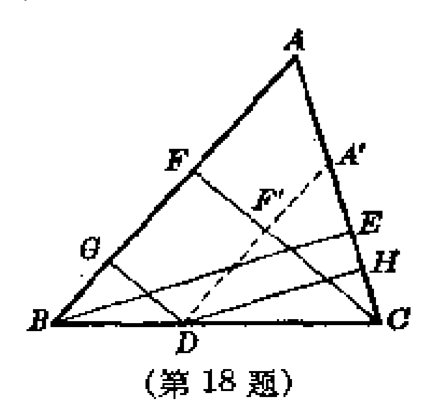
$\therefore A'$ 在以 M 为圆心，MA 为半径的圆上．在 $\odot M$ 中，$\because MC\perp A'B$，$\therefore A'C=CB$，即 $AD+DC=CB$．

本题的辅助圆与例 10 相同，解法也相近．

17．这条割线在与连心线平行时最长，其长 $=2\times O_1O_2$．



(第 17 题)



(第 18 题)

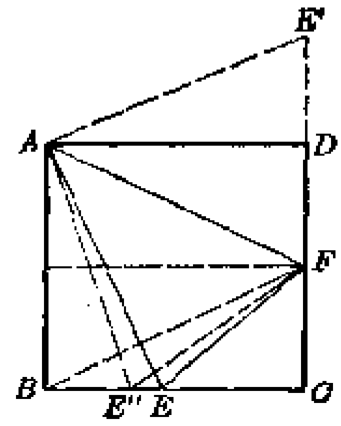
18．过 D 作 $DA'\parallel BA$ 交 AC 于 A'，交 CF 于 F'，由例题 4 可知 $DH>CF'$，从而 $DG+DH>CF'+F'F=CF$．

同样可证 $BE>DG$（以上推理适用于任意三角形）．本题是例题 4 的推广．

19．(1) $\because BD\geqslant AD\ \therefore MB\geqslant MA$（定理 II），同理 $MC\geqslant MB$，$\therefore MC\geqslant MA$，$CF\geqslant AF$（定理 II）．

(2) 由勾股定理可得 $AF^2-AM^2=CF^2-CM^2\leqslant CE^2-CM^2=BE^2$

$-BM^2 \leqslant BD^2 - BM^2 = AD^2 - AM^2$. 再在两边加上 AM^2 即得 $AF^2 \leqslant AD^2$.



(第 20, 21 题)

20. $\angle AFE > \angle AFB$, 又 F 在正方形的外接圆内, $\therefore \angle AFB > \angle ACB = 45°$.

21. 延长 CD 到 E' 使 $DE' = BE$ (即绕 A 点作 $90°$ 的旋转, 使 $\triangle ABE$ 变为 $\triangle ADE'$)

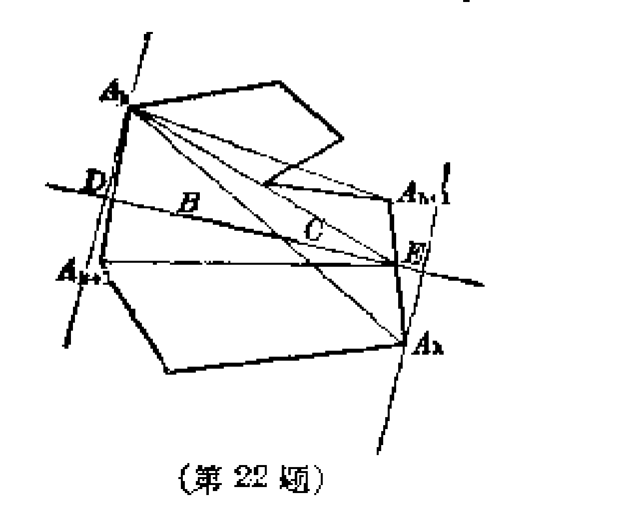
(1) 若 $\angle EAF = 45°$, 则 $\triangle AEF \cong \triangle AE'F$, $\therefore \angle AEF = \angle AE'F = \angle AEB$. 如果 $EF > AB$, 则 $E'F = EF > AB$, 可以将原正方形向上平移成以 F 为顶点的正方形, 对于这个新的正方形, 由上题 $\angle FAE' > 45°$, 但 $\angle E'AF = \angle EAF = 45°$, 矛盾.

(2) 若 $\angle EAF < 45°$, 则 $\angle E'AF > 45° > \angle EAF$, $\therefore E'F > EF$, $\angle AEF = \angle AEE' + \angle E'EF > \angle AE'E + \angle EE'F = \angle AE'F = \angle AEB$.

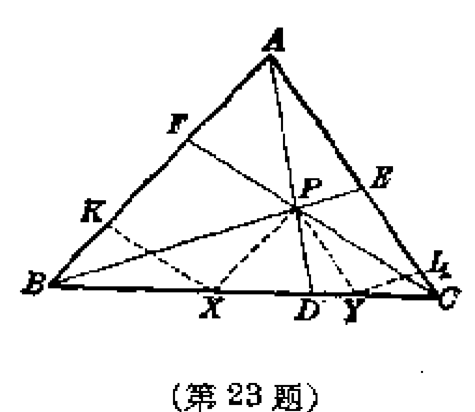
又作 $\angle FAE'' = 45°$, 则斜线 $FE < FE'' \leqslant AB$(由(1)).

22. 延长 BC 与边 A_kA_{k+1}、A_hA_{h+1} 分别相交于 D、E. 则由第 1 题, $BC \leqslant DE \leqslant \max(A_kE, A_{k+1}E) = A_kE$ (不妨设如此) $\leqslant \max(A_kA_h, A_kA_{h+1}) \leqslant \max A_iA_j$.

或者, 过每个顶点作 BC 的垂线, 则 BC 必夹在某两对垂线 A_iA_i' 及 A_jA_j' 之间, 因而 $BC \leqslant A_iA_j$.



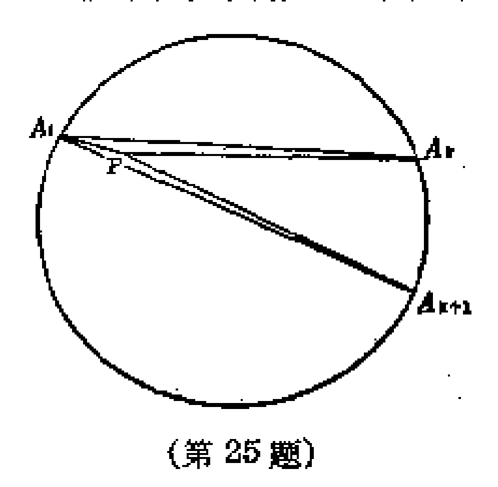
(第 22 题)



(第 23 题)

23. 不妨设最长边为 BC, 由第 1 题可得 $BC > AD$、BE 及 CF. 再

作 $PX \parallel AB$, $PY \parallel AC$, $XK \parallel CF$, $YL \parallel BE$(如图). 由相似三角形, $XY > DP$, $BX > XK = PF$, $YC > YL = PE$, 三式相加即得.



(第 25 题)

24. 设 Γ 与对角线 BD 相交于 G, G 在 BC 上的射影为 G'. 则 Γ 的长 $\geqslant GG' + G'C = BG' + G'C = BC = 1$.

25. 设在 A_1、A_2、…、A_n 中 A_i 到 P 点的距离最小, 再找出 k, 使 A_k、A_{k+1} 在 A_iP 两侧. 如图,

$$\angle A_kPA_{k+1} = \angle A_{k+1}A_iA_k + \angle PA_{k+1}A_i + \angle PA_kA_i$$
$$\leqslant \angle A_{k+1}A_iA_k + \angle PA_iA_{k+1} + \angle PA_iA_k = 180^\circ \times \frac{2}{n}.$$

从而 $\angle A_iPA_k$ 与 $\angle A_iPA_{k+1}$ 中必有一个 $\geqslant 180^\circ\left(1-\frac{1}{n}\right)$, 否则 P 点处的三个角的总和小于 360°. 不难看出命题对 $\odot O$ 内的任一点 P 成立.

习题三解答

1. 过 A 点作圆与 $\odot O$(1)内切(2)外切, 切点 P 即为所求. 可与习题一第 1 题相比较.

2. 等高线为平行于 AB 的直线, 这一族直线中有两条与圆相切, 切点即为所求.

3. 过 A、B 作圆, 这些圆就是等高(角)线, 其中有两个是与 MN 相切的, 切点即为所求. (一个是局部极大).

具体的作图可按下面的步骤进行: 求出 AB 与 MN 的交点 Q, 过 A、B 任作一圆, 作这圆的切线 QT, 以 Q 为圆心, QT 为半径画圆交 MN 于 P_1、P_2, 这两个点就是所要求的切点.

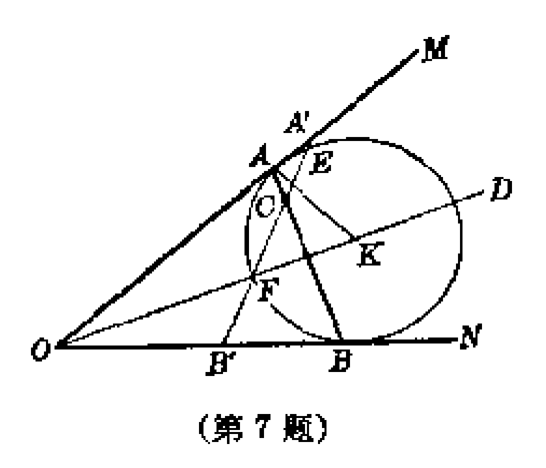
在 $AB \parallel MN$ 时, 只有一个切点, 作图很容易.

4. 利用例题 5 及局部调整法. 边界的情形是 (1) 有一条边趋向于零, 这时周长不超过直径的两倍; (2)有一条边为直径, 这时周长不超过 $(\sqrt{2}+1) \times$ 直径, 均非最大.

5. 仿照第2题，但 AB 为 $\odot O$ 的弦. 边界情形参照第4题.

6. 不能. 如 $a>b>c$，取 P 接近于 C 点，则 ΣPA 接近于 $a+b>a+c$.

7. 作角平分线 OD，再过 C 作直线与 OD 垂直，交角的两边于 A、B，则 $AC\times CB$ = 最小. 理由如下：



(第7题)

过 A、B 两点可以作一个圆 K 与 $\angle MON$ 的两边都相切. 设任一过 C 的直线交 OM、ON 于 A'、B'，交 $\odot K$ 于 E、F，则 $CA'\times CB'\geqslant CE\times CF=CA\times CB$.

8. 作以 A、B 为焦点的椭圆族. 这族椭圆逐渐扩大，开始在 $\odot O$ 内部，扩大到(从内部)与 $\odot O$ 相切，这时切点 C、D 就是最小点. 再逐渐扩大，椭圆有一部分在 $\odot O$ 外部. 又扩大椭圆与 $\odot O$ 先后两次相切于一点，第一次在 E、第二次在 F，显然有 EF 为与 AB 垂直的直径，且 E 为局部极大，而 F 为最大值. 如果 C、D、E 重合，那么 E 点只是最小点.

不难证出 C、D、A、B、O 五个点共圆(除非 C、D、E 重合)，因此只要过 A、B、O 作圆，这圆与 $\odot O$ 的交点就是 C、D. (在没有交点时，C、D 与 E 重合.)

9. 作以 B、C 为焦点的椭圆族，AT 是某一椭圆的切线，A' 在过 A'' 的椭圆内.

10. P 到 AB 的距离大于 D 到 AB 的距离，小于 C 到 AB 的距离.

习题四解答

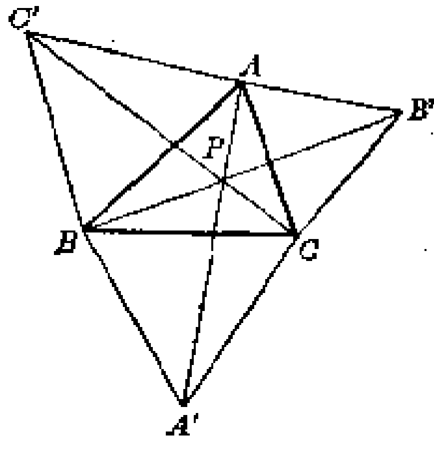
1. 设 $BC\geqslant CA\geqslant AB$. 高为 AD、BE、CF.

在 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，利用§2例题8可知 F 点即为所求. 在 $\triangle ABC$ 为直角三角形时，直角顶点 A 为所求. 在 $\angle A>90^\circ$ 时，作 $\angle BAG=90^\circ$，AG 交边 BC 于 G，则由 $AB+AC<AB+AG+CG<AD+BG+CG=AD+BC$，可以推知仍以 A 点为最小点.

2. 首先可以假定 CQ 为高. 以 B、C 为焦点的过 Q 的椭圆与以 A

为圆心的过 Q 的圆不相切（因为 $\odot A$ 的切线 CQ 显然不是椭圆的切线），所以 Q 不是最小点.

3. $\triangle AC'C$ 绕 A 旋转 $60°$ 就得到 $\triangle ABB'$. 三个圆的交点就是三条直线的交点.

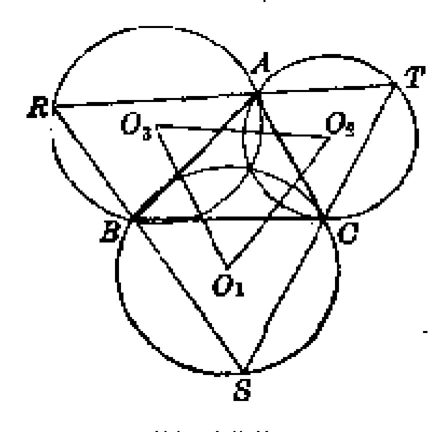


(第 4 题)

4. 若 Fermat 点 P 在 $\triangle ABC$ 内，则 $\angle A < \angle BPC = 120°$，同理 $\angle B$、$\angle C < 120°$.

反过来，设所有内角均小于 $120°$，上题 CC' 与 BB' 的交点为 P. 则我们有 $\angle C'AC = 60° + \angle BAC < 60° + 120° = 180°$ 及 $\angle C'BC < 180°$，所以四边形 $ACBC'$ 为凸四边形，$C'C$ 在凸四边形 $ACBC'$ 的内部，同样 BB' 在凸四边形 $ABCC'$ 内部，$\therefore P$ 在 $\triangle ABC$ 内部，易知 P 即 Fermat 点.

5. 这个定理的证明很多，如用 $\triangle O_3AO_2 \backsim \triangle C'AC$ 可得 $O_3O_2 : C'C = AO_3 : AB = \sqrt{3}/3$，再利用第 3 题.或者用余弦定理计算 O_2O_3 的长即可. 我们在这里介绍一个利用极值的证法：设第 3 题中的三个外接圆为 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$. 过 A 任作割线 RT，再作割线 BR 交 $\odot O_1$ 于 S，则因为 $\angle CTR = \angle ARB = \angle BSC = 60°$，所以 $\angle TCS = 360° - 3\times 60° = 180°$，即 T、C、S 共线，并且 $\triangle RST$ 为正三角形.



(第 5 题)

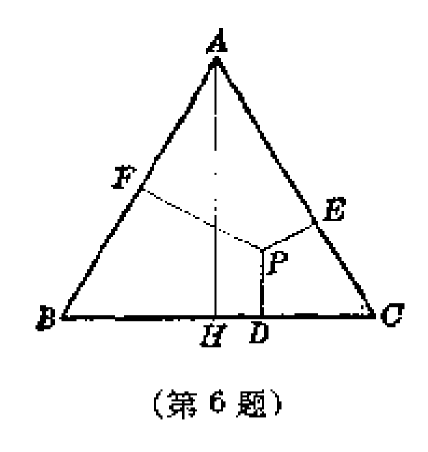
如果在这样的三角形中，$\triangle R_0S_0T_0$ 是周长最大的. 那么 $R_0T_0 \perp\!\!\!\!= 2O_1O_3$（习题二第 17 题），同样 $S_0T_0 \perp\!\!\!\!= 2O_2O_3$，$R_0S_0 \perp\!\!\!\!= 2O_1O_2$，

$\because \triangle R_0S_0T_0$ 是正三角形，$\therefore \triangle O_1O_2O_3$ 是正三角形.

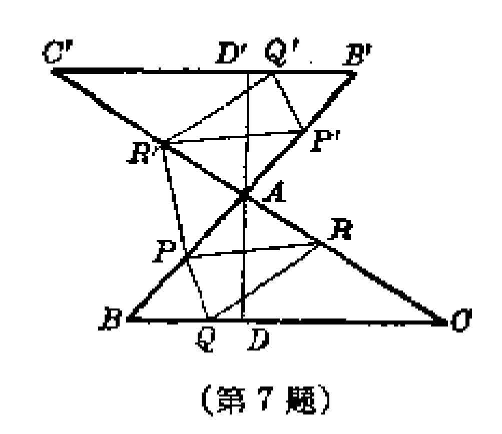
6. $\triangle ABC$ 的面积 $=\triangle PBC$、$\triangle PAB$、$\triangle PAC$ 的面积的和，即

$$\frac{1}{2}AH\times BC = \frac{1}{2}PD\times BC + \frac{1}{2}PE\times BC + \frac{1}{2}PF\times BC,$$

$$\therefore\quad AH = PD + PE + PF.$$

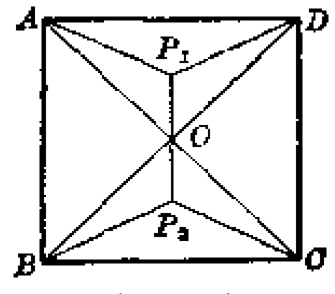


(第 6 题)



(第 7 题)

7. 如图，以 A 为对称中心作一中心对称（即绕 A 作 $180°$ 的旋转），则 $B'C' \parallel BC$，$\because \angle PAR \geqslant 90° \geqslant \angle PAR'$，$\therefore PR \geqslant PR'$（定理 IV）$PQ+PR+RQ \geqslant PQ+PR'+R'Q' > QQ' \geqslant DD' = 2AD$.

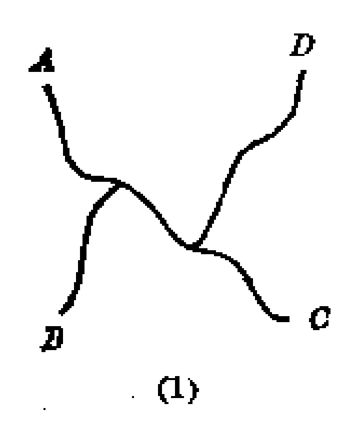


(第 9 题)

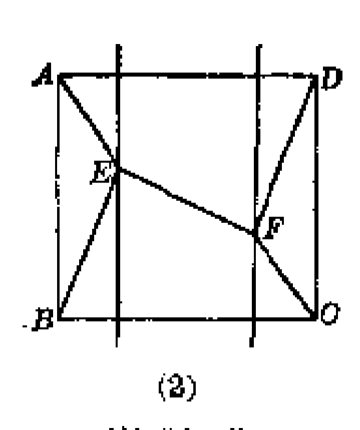
8. $PA+PB+PC \geqslant OA+OB+OC = 2AH = 2(PD+PE+PF)$，其中 O 为正三角形的中心即 Fermat 点，AH 为高.

9. 设 P_1 为 $\triangle OAD$ 的 Fermat 点，那么 $AP_1+P_1D+P_1O < OA+OD$，因而 $AP_1+P_1D+P_1O+OB+OC < AC+BD$.

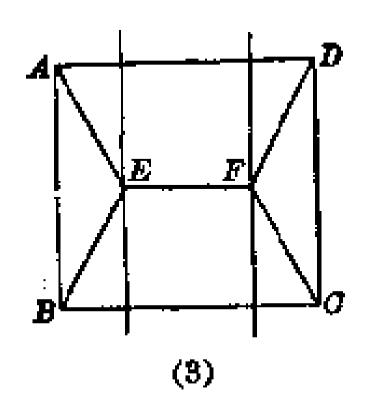
当然也可以再取 $\triangle OBC$ 的 Fermat 点 P_2. 下一题将证明 $AP_1+P_1D+P_1P_2+P_2B+P_2C$ 是最短的.



(1)



(2)



(3)

(第 10 题)

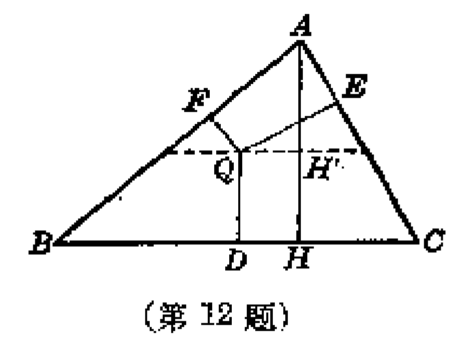
10. A、C 间必有一条路，B、D 间也必有一条路，两条路一定相交成图(1)形状（如果两条路不相交，总长 $> AC+BD$）.

将路“化直”，长度不会增如(图(2))。

过 E、F 作直线平行于 AB，由§1例题6及定理II可知对于最短的系统应当有 E、F 在正方形内并且 $EA=EB$，$FC=FD$，$EF\perp AB$。再由本节例题1可知 $\angle AEB=\angle CFD=120^\circ$(图(3))。

在 A、B、C、D 四点构成任意四边形时也可以用类似的方法处理。

11. 应用例题1，$DA+DB+DC\geqslant AB+AC$。



(第12题)

12. 设 $\angle A\geqslant\angle B\geqslant\angle C$，则

(1) P 为 A 点时，所说的和＝高 AH 为最小。因为设 Q 为三角形内部或边上的任一点，到三边距离为 QD、QE、QF。如图作 $QH'\parallel BC$，交 AH 于 H'。由习题二第18题及§2例题4，$QE+QF\geqslant AH'$，

$$\therefore\quad QE+QF+QD\geqslant AH.$$

(2) 仿(1)可证 P 为 C 点时，所说的和＝高 CK 为最大。

习题五解答

1. 甚易。如在 $A^2+B^2\geqslant 2AB$ 中令 $A^2=a$，$B^2=b$ 即得(1)，等等。

2. $c=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\sqrt{2ab}=\sqrt{4\triangle}$，$\therefore\quad \triangle\leqslant\dfrac{c^2}{4}$。

3. 由中线公式，$m_b^2=(2c^2+2a^2-b^2)/4<(2b^2+2a^2-c^2)/4=m_c^2$。

4. 由中线公式，

$$2(AB^2+AC^2)=4OA^2+BC^2=EF^2+\left(\frac{1}{3}EF\right)^2=\frac{10}{9}EF^2,$$

$$\therefore\quad AB+AC\leqslant\sqrt{2(AB^2+AC^2)}=\frac{\sqrt{10}}{3}EF.$$

5. (1) $(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2>b+c>a$，$\therefore\quad \sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{a}$，同理可得其他；

(2) $\because b+c>a$，即 $(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2>(\sqrt{a})^2$，等等，$\therefore\triangle ABC$ 是锐角三角形；

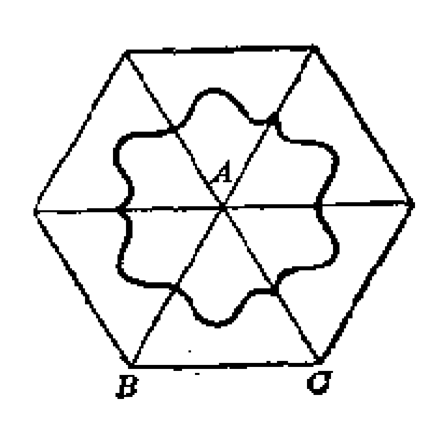
(3) 设 c 为最大边，则 $\frac{b}{\sqrt{c}}\leqslant\frac{c}{\sqrt{a}}$，由此可知相似比一定是 $\frac{c}{\sqrt{c}}=\sqrt{c}$，而由 $\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{b}{\sqrt{b}}$ 或 $\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{b}{\sqrt{a}}$，都可以推出 $a=b$，从而在两三角形相似时一定有 $a=b=c$.

6. 在例题 7 中令 $\lambda=\mu=\nu=1$ 即得，等号当且仅当正三角形时成立. 或者利用 $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 也可证.

7. $(a+b+c)(h_a+h_b+h_c)=2\triangle(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant18\triangle$，这里用到 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant3^2$. 参见本习题中 12 题.

$$\therefore\quad h_a+h_b+h_c\geqslant\frac{18\triangle}{a+b+c}=9r.$$

8. 以 A 为圆心作圆弧 L' 将 $\triangle ABC$ 的面积二等分，则 $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2=R^2\times\frac{\pi}{6}$（$R$ 为圆半径），$\therefore L'$ 的长 $l'=\frac{2\pi R}{6}=\sqrt{\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\cdot\sqrt[4]{3}}a.$



（第 8 题）

而 $l\geqslant l'$，理由是如果我们将 $\triangle ABC$ 连续翻转六次，这时 L 形成一条闭曲线（如图），L' 形成一个圆，并且两者包围的面积相同. 由本节末尾的定理 VIII 不难推出在面积相等的图形中，圆的周长为最小，$\therefore 6l\geqslant6l'$，$l\geqslant l'=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{4}}a$. 如果将正三角形换成任意的三角形或四边形，仍以相应的圆弧为最短. 在四边形对边平行的特殊情况下可能是直线段（可以看成是圆心在无穷远的圆）.

9. 如果关于 OX、OY 及 O 点作对称，可以得到一个周长一定的八边形，在这八边形为正八边形时面积为最大，于是应当有 $PA=PB$，$\angle OAP=\angle OBP=\frac{3}{8}\pi$.

10. 设 $\triangle PP_2P_3$、$\triangle PP_3P_1$、$\triangle PP_1P_2$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3，不妨假定 $S_1\geqslant S_2\geqslant S_3$，于是

$$\frac{P_3P}{PQ_3}=\frac{S_1+S_2}{S_3}\geqslant 2,\quad \frac{P_1P}{PQ_1}=\frac{S_2+S_3}{S_1}\leqslant 2.$$

11. (1) 对于 $x_1,\ x_2\in(0,\ \infty)$, $\because\ \frac{x_1+x_2}{2}\geqslant\sqrt{x_1x_2}$ $\therefore\ \log_a\frac{x_1+x_2}{2}\geqslant\frac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)$;

(2) 对于 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\pi$, $\because\ \sin\frac{x_1+x_2}{2}\geqslant 0$,

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}\leqslant\sin\frac{x_1+x_2}{2};$$

(3) 将 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$, 就得到 $y=\cos x$ 的图象, 即 $\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. 或仿照(2)直接证明.

12. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\sum\limits_{i<j}(a_ib_j-a_jb_i)^2\geqslant 0$.

13. $4\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\leqslant 4\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}1^2\right)^{1/2}=4\sqrt{nQ}$($x_i$ 为第 i 个正方形的边长).

14. $\because\ a^2+b^2\geqslant 2ab$ $\therefore\ a^2+b^2+c^2\geqslant\sigma_2$. $\sigma_1^2=(a^2+b^2+c^2)+2\sigma_2\geqslant 3\sigma_2$.

$$\because\quad c<a+b\quad\therefore\quad c^2<ac+bc,$$

$$a^2+b^2+c^2<2\sigma_2,\ \ \sigma_1^2=a^2+b^2+c^2+2\sigma_2<4\sigma_2.$$

15. 显然 $\frac{r}{h}=\frac{c}{a+b+c}$, $\because\ a+b+c>c+c=2c$ $\therefore\ \frac{r}{h}<\frac{1}{2}=0.5$ 又 $a+b<\sqrt{2(a^2+b^2)}=\sqrt{2}\,c$, $\therefore\ \frac{r}{h}>\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1>0.4$.

16. $\because a<b+c$, $\therefore\ \frac{a}{a+b+c}<\frac{1}{2}$, $\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}<\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C=\frac{\pi}{2}$.

由于§2定理III, $(a-b)(A-B)\geqslant 0$, $(b-c)(B-C)\geqslant 0$, $(c-a)(C-A)\geqslant 0$.

$$\therefore\quad 3(aA+bB+cC)-(a+b+c)(A+B+C)$$
$$=(a-b)(A-B)+(b-c)(B-C)+(c-a)(C-A)\geqslant 0$$

即 $\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\geqslant\frac{A+B+C}{3}=\frac{\pi}{3}$, 等号在且仅在 $a=b=c$, 即正三角形时成立. $\pi/2$ 不能改成较小的数, 考虑 $A\to\pi$, $B\to 0$, $C\to 0$ 的极

限情况就可以看出这一点.

17. $\because\ \dfrac{AF}{AB}=\dfrac{b}{a+b},\ \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{c}{a+c}$

$\therefore\ \dfrac{\triangle AEF\text{的面积}}{\triangle ABC\text{的面积}}=\dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}$.

只要能证出$\dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{ac}{(b+a)(b+c)}+\dfrac{ab}{(c+a)(c+b)}\geqslant\dfrac{3}{4}$就可以了. 经过化简, 这个式子等价于 $a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b\geqslant 6abc$. 由于 $a^2b+bc^2\geqslant 2abc$, 所以该式成立. 本题的等号在且仅在正三角形时成立.

18. 由角平分线公式 $t_a\leqslant\sqrt{s(s-a)}$, $\therefore t_a+t_b+t_c\leqslant\sqrt{s(s-a)}+\sqrt{s(s-b)}+\sqrt{s(s-c)}=\sqrt{s}\,(1\cdot\sqrt{s-a}+1\cdot\sqrt{s-b}+1\cdot\sqrt{s-c})\leqslant\sqrt{s}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{(s-a)+(s-b)+(s-c)}$ (利用本节习题 12 的 Cauchy 不等式)$=\sqrt{3}S$, $t_a^2+t_b^2+t_c^2\leqslant s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)=s^2$, $t_at_bt_c\leqslant\sqrt{s(s-a)\cdot s(s-b)\cdot s(s-c)}=s\triangle$. 等号都仅在正三角形时成立.

19. 在例题 7 中令 $\lambda=b_1^2+c_1^2-a_1^2$, $\mu=c_1^2+a_1^2-b_1^2$, $\nu=a_1^2+b_1^2-c_1^2$

则
$$\mu\nu=a_1^4-(b_1^2-c_1^2)^2=a_1^4-b_1^4-c_1^4+2b_1^2c_1^2,$$
$$\sum\mu\nu=-\sum a_1^4+2\sum b_1^2c_1^2=16\Delta_1^2$$

$[\sum a^2(b_1^2+c_1^2-a_1^2)]^2\geqslant 16\Delta_1^2\cdot 16\Delta^2$, 两边开方即得 Pedoe 不等式. 根据例题 7, 等号在且仅在 $\dfrac{b_1^2+c_1^2-a_1^2}{b^2+c^2-a^2}=\dfrac{c_1^2+a_1^2-b_1^2}{c^2+a^2-b^2}=\dfrac{a_1^2+b_1^2-c_1^2}{a^2+b^2-c^2}$ 时成立. 利用比的性质得 $\dfrac{b_1^2+c_1^2-a_1^2}{b^2+c^2-a^2}=\dfrac{c_1^2+a_1^2-b_1^2}{c^2+a^2-b^2}=\dfrac{(b_1^2+c_1^2-a_1^2)+(c_1^2+a_1^2-b_1^2)}{(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2)}=\dfrac{c_1^2}{c^2}$, 因此 $\dfrac{a_1^2}{a^2}=\dfrac{b_1^2}{b^2}=\dfrac{c_1^2}{c^2}$. 所以在且仅在两个三角形相似时等号成立. 不用例题 7 的证明见 §6 例题 10.

20. 可以认定 $\triangle\triangle'$ 为常数, 考虑 $F=a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2$ 的极小值. 作 $AH\perp BC$ 于 H, $A'H'\perp B'C'$ 于 H', 且设 $AH=h$, $A'H'=h'$, $BH=p$, $B'H'=p'$, $CH=q$, $C'H'=q'$, 先固定 p、q、p'、q', 在 hh' 不变的条件下调整 h 与 h' 使 F 最小. 因为
$$F=a^2a'^2+h^2(p'^2+q'^2)+h'^2(p^2+q^2)$$

所以在 F 最小时，

$$h^2(p'^2+q'^2)=h'^2(p^2+q^2),$$

即

$$h^2/b^2+c^2=h'^2/b'^2+c'^2 \tag{1}$$

但 F 的最小值 F_1 一定可以在 $\triangle=\triangle'$ 时取得，这是因为 F 是齐次的，总可以将 a、b、c 同乘上一个正数 λ，a'、b'、c' 同乘上 $1/\lambda$，使 $\triangle=\triangle'$，而 F 的值仍为最小值 F_1.

现在假定 a_0、b_0、c_0、a_0'、b_0'、c_0' 使 $\triangle=\triangle'$，并且使 F 最小. 由(1)得 $4\Delta^2/a_0^2(b_0^2+c_0^2)=4\Delta'^2/a_0'^2(b_0'^2+c_0'^2)$，因为 $\triangle=\triangle'$，所以

$$a_0^2(b_0^2+c_0^2)=a_0'^2(b_0'^2+c_0'^2),$$

同理

$$b_0^2(c_0^2+a_0^2)=b_0'^2(c_0'^2+a_0'^2),$$

$$c_0^2(a_0^2+b_0^2)=c_0'^2(a_0'^2+b_0'^2).$$

从而推出 $a_0=a_0'$, $b_0=b_0'$, $c_0=c_0'$. 这时

$F=F_1=a_0^4+b_0^4+c_0^4\geqslant-a_0^4-b_0^4-c_0^4+2a_0^2b_0^2+2b_0^2c_0^2+2c_0^2a_0^2=16\Delta\Delta'$.

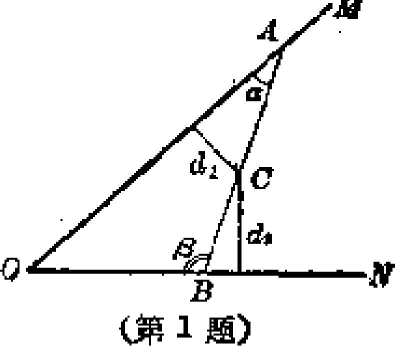
因此总有 $F\geqslant16\triangle\triangle'$，并且等号当且仅当两个三角形都是正三角形时成立.

在本题中令 $a'=b'=c'$ 便得到 $a^2+b^2+c^2\geqslant4\sqrt{3}\,\triangle$，即第 6 题.

本题与第 19 题的 Pedoe 不等式非常相象，从 Pedoe 不等式能简便地推出这个不等式.

习题六解答

1. 设 C 到 OM、ON 的距离为 d_1、d_2，$\angle OAC=\alpha$，$\angle OBC=\beta$，则 $CA\times CB=\dfrac{d_1}{\sin\alpha}\times\dfrac{d_2}{\sin\beta}=\dfrac{2d_1d_2}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$，在 $\alpha=\beta$ 时值最小.（与习题三第 7 题比较）



(第 1 题)

2. 由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geqslant2c^2-2c^2\cos120°=3c^2$

3. $\therefore\ a=h_a(\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta)>h_a(\text{tg}\,\alpha+\text{ctg}\,\alpha)\geqslant2h_a$. 这里用到 $\text{tg}\,\alpha+\text{ctg}\,\alpha\geqslant2$.

4. $\angle APB$、$\angle BPC$、$\angle CPA$ 中必有一个 $\geqslant120°$，再利用第 2 题.

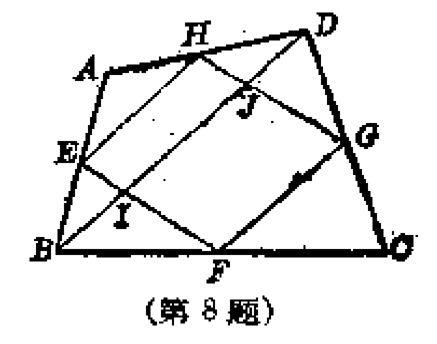
5．若 $ABCD$ 为凸四边形，则有一角比如 $A\geqslant 90°$，$\therefore BD^2\geqslant AB^2+AD^2\geqslant 2[\min(AB,\ AD)]^2$．

若 $ABCD$ 不凸不妨设 D 在 $\triangle ABC$ 内，则利用第 4 题．

6．由 § 5 例题 5，$(a+b+c)^2\geqslant 12\sqrt{3}\,\triangle$，两边同时除以 $a+b+c$ 即得．或参照 § 7 例题 5．

7．显然四边形面积 $=\dfrac{1}{2}$ 对角线乘积 $\times\sin\alpha$，α 为对角线夹角．

8．如图 $\triangle ABD$ 的面积 $=2\times$ 四边形 $EIJH$ 的面积，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $=2\times$ 四边形 $EFGH$ 的面积 $\leqslant EG\times FH\leqslant \dfrac{AB+CD}{2}\times\dfrac{AD+BC}{2}$（习题一第 11 题）．



（第 8 题）

9．由于周长相等的 n 边形中以正 n 边形面积为最大，$\therefore A\leqslant na^2/4\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$，其中 $a=\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$．

$$\text{而}\ na^2=\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)^2\leqslant\frac{1}{n}(a_1^2+\cdots+a_n^2)\cdot(1^2+\cdots+1^2)$$
$$=(a_1^2+\cdots+a_n^2)．$$

10．由习题三第 4 题，$3\sqrt{3}R\geqslant a+b+c$，又由 § 5 例题 5，$a+b+c\geqslant 2\sqrt[4]{3^3}\sqrt{\triangle}$，$\therefore R\geqslant\dfrac{2}{3^{3/4}}\sqrt{\triangle}$，$abc=4R\triangle\geqslant 8\triangle^{3/2}/3^{3/4}$．

11．设 AE、BH 为高，则 $AD+BC\geqslant AE+BC\geqslant 2\sqrt{AE\times BC}=2\sqrt{2\triangle}=2\sqrt{BH\times AC}=2\sqrt{BH\times AB}\geqslant 2\cdot BH=2(DE+DF)$．

12．应用 Erdös-Mordell 不等式，取 P 为内心 I 即得．

13．应用 Erdös-Mordell 不等式．

14．利用 Lagrange 配方法，左边 $=(x-y\cos C-z\cos B)^2+(y\sin C-z\sin B)^2\geqslant 0$．等号在且仅在 $x:y:z=a:b:c$ 时成立（a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的边）．

15．设 $C\leqslant B\leqslant A$．(1) $\sin A+\sin B+\sin C=\sin A+2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$ 如果 A 角固定，显然上式的值随 $\dfrac{B-C}{2}$ 的增大而减小，但 $\dfrac{B-C}{2}<\dfrac{B}{2}\leqslant\dfrac{A}{2}$，$\therefore \sin A+\sin B+\sin C>\sin A+2\sin\left(90°-\dfrac{A}{2}\right)\cos\dfrac{A}{2}$

$=\sin A+1+\sin(90°-A)=1+\sin A+\cos A>2$. 这也是一种局部调整法，是把差调整得尽可能大。这里的极(小)值是在临界时达到的。

(2) 由于 $\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上是凸函数，$\therefore \sin A+\sin B+\sin C<3\sin\frac{A+B+C}{3}=3\sin 60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(3) 仿(1)可得

$$\cos A+\cos B+\cos C>1,$$

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C-120°}{2}$$

$=\cos A+\cos 60°+\cos(B+C-60°)=\cos 60°+2\cos 60°\cos(A-60°)\leqslant 3\cos 60°=3/2$.

(4) $\sin A+\sin B+\sin C-(\cos A+\cos B+\cos C)$

$$=\sin A-\cos A+2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B+C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)$$

$$>\sin A-\cos A+2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B+C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)=1,$$

$\sin A+\sin B+\sin C-(\cos A+\cos B+\cos C)$

$$=\sin B-\cos B+2\cos\frac{A-C}{2}\left(\sin\frac{A+C}{2}-\cos\frac{A+C}{2}\right)$$

$$\leqslant\sin B-\cos B+2\cos\frac{A+C-120°}{2}\left(\sin\frac{A+C}{2}-\cos\frac{A+C}{2}\right)$$

$=\sin B-\cos B+\sin(A+C-60°)+\sin 60°-\cos(A+C-60°)-\cos 60°$

$=2\sin 60°\cos(B-60°)-2\cos 60°\cos(B-60°)+\sin 60°-\cos 60°$

$\leqslant 3(\sin 60°-\cos 60°)=(3\sqrt{3}-2)/2$.

对任意三角形(2)与(3)，(4)后一结论仍然成立。

16. (1) 考虑 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ACP$ 的面积的和。

(2) 由(1) $px\geqslant\left(\frac{b}{a}\right)pq+\left(\frac{c}{a}\right)pr$,

$$\therefore\quad px+qy+rz\geqslant\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)pq+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)pr+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)qr$$

$$\geqslant 2(pq+pr+qr).$$

(3) 由(1)有 $ax\geqslant 2(bcqr)^{1/2}$ 等，$\therefore ax\cdot by\cdot cz\geqslant 8(bcqr)^{1/2}\cdot(acpr)^{1/2}$

$\cdot(abpq)^{1/2}=8\cdot ap\cdot bq\cdot cr,$

$$\therefore\quad xyz\geqslant 8pqr.$$

或者由例题8得 $xyz\geqslant(p+q)(p+r)(q+r)\geqslant 2\sqrt{pq}\cdot 2\sqrt{pr}\cdot 2\sqrt{qr}$ $=8pqr.$

17. 图同§3例题5，设 $\angle OAB=\phi$，$\angle PAB=\alpha$，$\angle PBA=\beta$，

则
$$PA+PB=d\cos(\phi-\alpha)+d\cos(\phi-\beta)$$
$$=2d\cos\left(\phi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

由于 $\alpha+\beta$ 为定角，$\therefore PA+PB$ 随 $|\alpha-\beta|$ 的增加而减少，在 $\alpha=\beta$ 时为最大. 这当然也可以解§2例题10(参看§3例题5的叙述).

18. 解一：
$$a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2-16\triangle\triangle'=a^2a'^2+b^2b'^2$$
$$+(a^2+b^2-2ab\cos C)(a'^2+b'^2-2a'b'\cos C')$$
$$-4aba'b'\sin c\sin C'\geqslant 2aa'bb'$$
$$+(2ab-2ab\cos C)(2a'b'-2a'b'\cos C')$$
$$-4aa'bb'\sin C\sin C'$$
$$=4aa'bb'\left[\frac{3}{2}-\cos C-\cos C'+\cos(C+C')\right].$$

但 $\cos C+\cos C'+\cos[180°-C-C']\leqslant 3/2$（不妨设 $C+C'<180°$），故原不等式成立.

解二：设两三角形的外接圆半径分别为 R 及 R'，则

$$a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2=16R^2R'^2(\sin^2A\sin^2A'$$
$$+\sin^2B\sin^2B'+\sin^2C\sin^2C')$$
$$\geqslant 16R^2R'^2\times 3\sqrt[3]{\sin^2A\sin^2A'\sin^2B\sin^2B'\sin^2C\sin^2C'},$$

而由15(2)
$$\sin A\sin B\sin C\leqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

$$\therefore\quad a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2$$
$$\geqslant 16R^2R'^2\times 3\times\sin A\sin A'\sin B\sin B'\sin C\sin C'\Big/\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=16\times 4R^2R'^2\sin A\sin A'\sin B\sin B'\sin C\sin C'=16\triangle\triangle'.$$

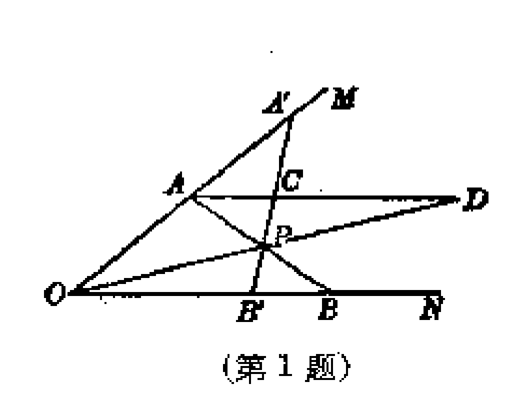
习题七解答

1. 如果 $\triangle OAB$ 是最小的，那么 P 是 AB 的中点. 因为过 P 任作

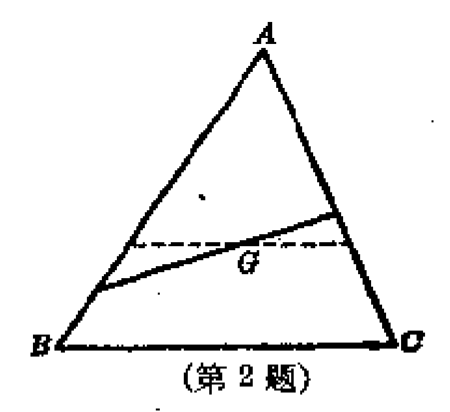
一直线截得 $\triangle OA'B'$(如图)，再作 $AC \parallel OB$ 与 $A'B'$ 相交于 C，那么 $\triangle PAA'$ 的面积 $\geqslant \triangle ACP$ 的面积 $= \triangle BB'P$ 的面积，$\therefore \triangle OA'B'$ 的面积 $\geqslant \triangle OAB$ 的面积.

这里的证法和例题 5 是一致的.

要作出这样的 $\triangle OAB$ 并不困难，只要连结 OP 并延长到 D，使 $DP = OP$，再过 D 作直线与 ON 平行，它与 OM 的交点就是 A.



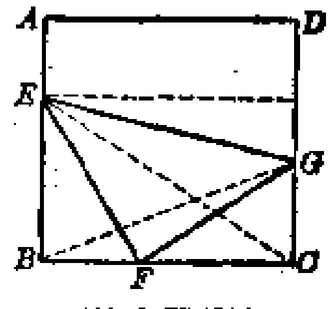
(第 1 题)



(第 2 题)

2. 由上题可知截出的三角形部分的面积 $\geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \triangle ABC$ 的面积 $= \frac{4}{9} \triangle ABC$ 的面积，又不难推出这个截出的三角形的面积 $\leqslant \triangle ABC$ 的面积的一半，所以，两部分面积之差 $\leqslant \left(\frac{5}{9} - \frac{4}{9}\right) \times \triangle ABC$ 的面积.

这个结论对于任意的平面凸区域均成立，而且可以推广到 n 维空间(这时 $\frac{1}{9}$ 要换成 $1-2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$).



(第 3 题(1))

3. (1) 由习题三第 10 题，可知 $\triangle EFG$ 的面积 $\leqslant \max$ ($\triangle BGE$ 的面积，$\triangle CEG$ 的面积) $\leqslant \frac{1}{2}$.

(2) 最大周长为 $2+\sqrt{2} \approx 3.4$，因为 $\triangle EFG$ 的周长 $\leqslant \max$($\triangle BGE$ 的周长，$\triangle CGE$ 的周长)(习题一第 17 题) 而 $\triangle BEG$ 的周长 $\leqslant \max$ ($\triangle BED$ 的周长，$\triangle BEC$ 的周长) $\leqslant 2+\sqrt{2}$. 同样 $\triangle CGE$ 的周长 $\leqslant 2+\sqrt{2}$.

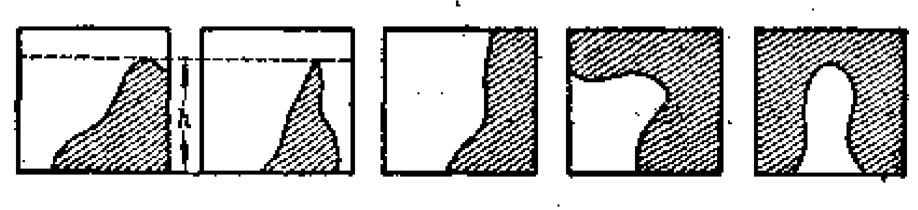
因此最大面积与最大周长均在三角形为 $\triangle ABD$ 型的时候达到.

4. 不失普遍性可设 $AE \leqslant \frac{1}{2} AC$，$AD \leqslant \frac{1}{2} AB$，则 $\triangle DEF$ 的面积

$\geqslant \triangle AED$ 的面积（设 AF 交 ED 于 G，则$AG\leqslant\frac{1}{2}AF\leqslant FG$，故 F 到 ED 的距离大于等于 A 到 ED 的距离）.

可以证明 $\triangle DEF$ 的周长也不比其余的三个三角形的周长都小.

5. 有五种情况（如图），前两种情况 $S\leqslant h\leqslant l$.



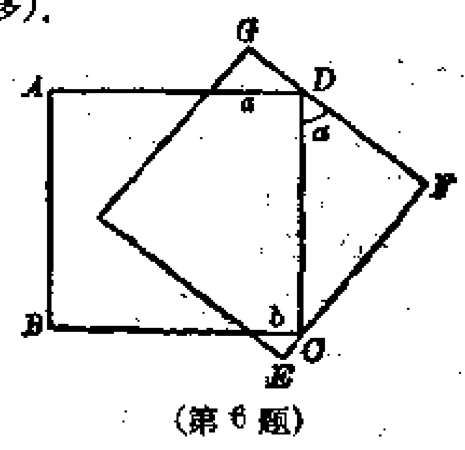
（第 5 题）

后三种，根据习题二第 24 题，$S\leqslant 1\leqslant l$.

6. 由于每一个小正方形不能盖住大正方形的对角线，故每一个小正方形不能盖住大正方形的三个顶点，因此如果两个小正方形能盖住大正方形，每个小正方形恰好盖住大正方形的两个相邻的顶点. 可假定 C、D 在一个小正方形的边上（否则作平移）.

如图

$$a+b=\frac{GD}{\sin\alpha}+\frac{CE}{\cos\alpha}$$
$$<\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha-1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\frac{(\cos\alpha-1)(1-\sin\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}+1<1$$



（第 6 题）

因此每一个小正方形盖不住大正方形 $ABCD$ 的周长的一半. 两个小正方形盖不住大正方形的周长.

7. 不能，设想 $P\to A$，且趋近时 P 靠近 c 边，则 $x+y+z\to b+c$，$u+v+w\to c$. 如果 c 远大于 b，则在 $k>1$ 时，$x+y+z>k(u+v+w)$ 不成立.

8. (1) 由 $x+y+z\geqslant 2(p+q+r)$ 经变换 $\boldsymbol{S}$（本题即习题六第 16 题(2)）.

(2) 由例题 9 经变换 $\boldsymbol{R}$.

(3) 由例题10经变换 V.

9. 利用变换 S.

10. 经变换 R、V 分别得 $x^2y^2z^2 \geqslant pqr(x+y)(y+z)(z+x)$ 及 $x^2y^2z^2 \geqslant (qy+rz)(px+qy)(rz+px)$.

11. 由例题9及第8(1)题即得.

12. 问题即证明 $AB_1^2+AB^2 \geqslant O_1B_1^2+O_1B^2$. 由中线公式, 只要证明 $AC \geqslant O_1C$ (其中 C 为 B_1B 中点). 而由 $\triangle OAC$, 立即得到 $AC \geqslant |OC-OA| = O_1C$.

13. $\triangle P_1P_2P_3$ 是正三角形. 证明仿照 § 5 例题 4 并利用 § 5 例题 5 及 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9$. 本题可推广至 n 个点的一般情形.

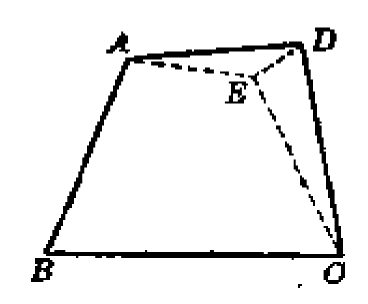
14. $r=\frac{2\triangle}{a+b+c}$, $R=\frac{abc}{4\triangle}$,

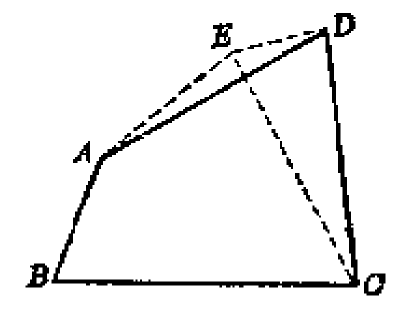
$$\therefore \quad \frac{2r}{R}=\frac{16^2\triangle}{abc(a+b+c)} \leqslant \frac{16\triangle^2}{3(abc)^{4/3}} \leqslant 1.$$

15. 考虑满足条件 $A''B''=AB$, $B''C''=BC$, $C''D''=CD$, $\angle A''B''C''=\angle ABC$, $\angle B''C''D''=\angle B'C'D'<\angle BCD$ 的凸四边形 $A''B''C''D''$, 作四边形 $ABCE$ 与 $A''B''C''D''$ 全等, 显然 CE 在 $\angle BCD$ 内部. 这时有三种情况:

(1) E 在四边形 $ABCD$ 内. 由于四边形 $ABCE$ 是凸的, 所以 $\angle AEC<180°$, 又 $\angle CED=\angle CDE<90°$, 所以 $\angle AED$ 是钝角, $AD>AE=A''D''$.

(2) E 在四边形 $ABCD$ 外. $\angle AED>\angle CED=\angle CDE>\angle ADE$, 所以仍有 $AD>AE=A''D''$.



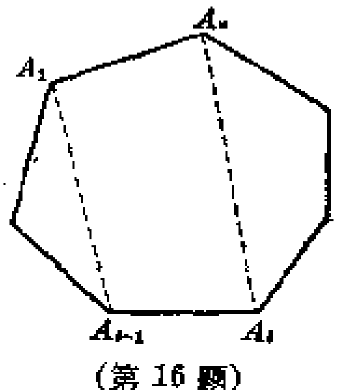


(第 15 题)

(3) E 在边 AD 上，这时显然有 $AD>AE=A''D''$.

同理可得 $A''D''>A'D'$，所以 $AD>A'D'$.

16. 仿照上题，只要考虑有一个角变小，而其余部分保持不变的情形. 假定 $\angle A_nA_iA_{i-1}$ 的边 A_iA_n 转动而使 $\angle A_{i-1}A_iA_n$ 减少，由四边形 $A_1A_{i-1}A_iA_n$ 可以知道 A_nA_1 是在减少的.



(第 16 题)

17. $n=3$、4 时显然，$n=5$ 时方法和例题相同. $n>6$ 时用归纳法. 去掉 $\triangle A_1A_2A_3$ 后利用归纳假设得 $(n-1)\cdot m\leqslant S-\triangle A_1A_2A_3$ 的面积于是 $n\cdot m\leqslant S$.

18. 以 O 为原点、直线 LL' 为 x 轴建立直角坐标. 设 L、M、N 及 L' 的坐标分别为 $(l, 0)$, (m, m'), (n, n'), $(-l, 0)$. 则

$$\begin{aligned}
&LM^2+MN^2+NL'^2-(OL^2+OM^2+ON^2)\\
&=(l-m)^2+m'^2+(m-n)^2+(m'-n')^2+(n+l)^2\\
&\quad+n'^2-l^2-(m^2+m'^2)-(n^2+n'^2)\\
&=l^2+m^2+n^2+m'^2+n'^2+2nl-2ml-2mn-2m'n'\\
&=(l-m+n)^2+(m'-n')^2\geqslant 0.
\end{aligned}$$

等号在且仅在 $m'=n'$ 并且 $l=m-n$ 时成立，这两个条件也就是 $MN \perp OL$.

19. 由角平分线公式可得

$$PD=\frac{2PB\times PC}{PB+PC}\cos\frac{1}{2}\angle BPC\leqslant\sqrt{PB\times PC}\cos\frac{1}{2}\angle BPC,$$

$$PE\leqslant\sqrt{PC\times PA}\cos\frac{1}{2}\angle CPA,\quad PF\leqslant\sqrt{PA\times PB}\cdot\cos\frac{1}{2}\angle APB.$$

在上题中令

$$OL=\sqrt{PA},\quad OM=\sqrt{PB},\quad ON=\sqrt{PC},$$

$$\angle LOM=\frac{1}{2}\angle APB,\ \angle MON=\frac{1}{2}\angle BPC,\ \angle NOL'=\frac{1}{2}\angle CPA.$$

则

$$LM^2=PA+PB-2\sqrt{PA\times PB}\cos\frac{1}{2}\angle APB.$$

$$MN^2=PB+PC-2\sqrt{PB\times PC}\cos\frac{1}{2}\angle BPC,$$

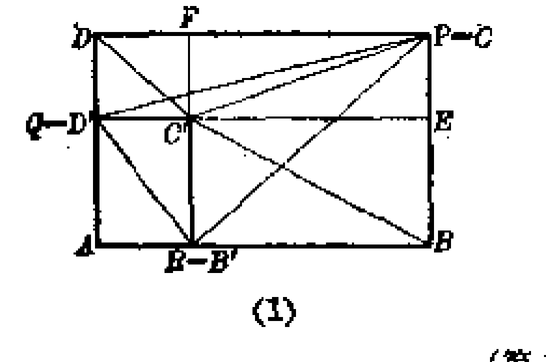
$$NL'^2=PC+PA-2\sqrt{PC\times PA}\cos\frac{1}{2}\angle CPA.$$

代入上题不等式中即得.

本题比 Erdös-Mordell 不等式稍强.

20. 取其中一个点为反演中心作反演变换，问题就化为 Sylvester 定理.

21. 先考虑 $P=C$, $Q=D'$, $R=B'$ 的情形(图 1). 不难看出 $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PC'D'$, $\triangle PC'B'$, $\triangle B'C'D'$ 的面积和, 也就是 $\triangle DC'D'$, $\triangle BC'B'$, $\triangle B'C'D'$ 的面积和, 即矩形 $C'FDD'$, $BEC'B'$, $AB'C'D'$ 的面积的和的一半, 也就等于 $\frac{1}{2}ab(\lambda+\mu-\lambda\mu)$. 其余的情形, 例如图(2), 先作出矩形 $A_1B_1PD_1$ 及 $ARC_1'Q$, $\triangle PQR$ 的面积等于矩形 $A_1RC_1'Q$, $RB_1E_1C_1'$, $C_1'F_1D_1Q$ 的面积和的一半, 因此不超过矩形 $AB'C'D'$、$B'BEC'$、$C'FDD'$ 的面积和的一半, 即不超过 $\frac{1}{2}ab(\lambda+\mu-\lambda\mu)$.

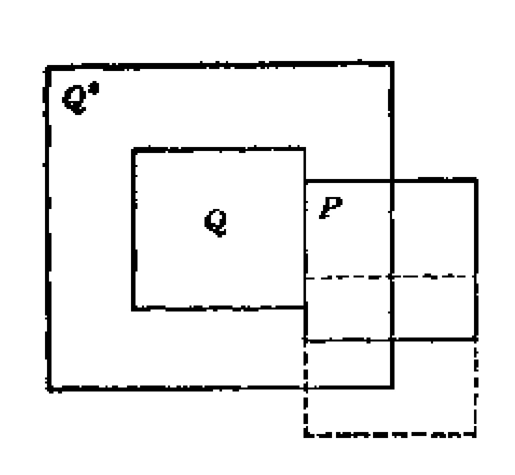


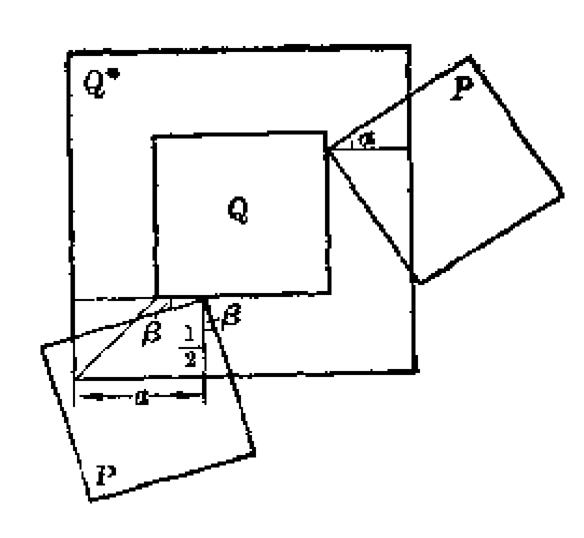
(1)　　　　(2)

(第 21 题)

22. 设第一个正方形为 Q, 其边长为 1. 将 Q 放大为边长为 2 的正方形 Q^*(位似中心为 Q 的中心), 如果能够证明每个与 Q 相接触的、边长为 1 的正方形一定含 Q^* 的周长的一部分, 并且这部分长 $\geqslant 1$, 那么由于 Q^* 的周长为 8, 至多只能有 8 个边长为 1 的正方形, 彼此没有公共内点, 并且都和 Q 相接触. 现在有两种情况:

(1) 正方形 P 有一边与 Q 相接触, 这时 P 含 Q^* 的一段周长, 并且这段长 $=1$ 或 $\geqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

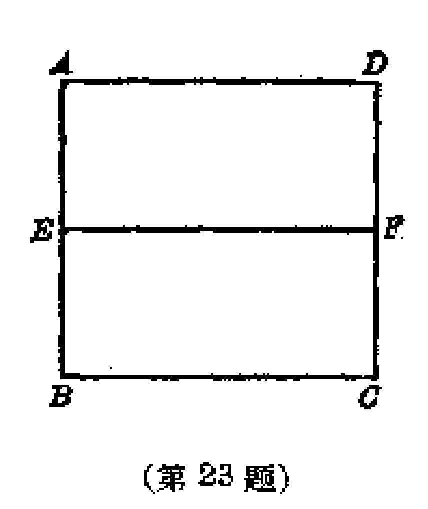




(第 22 题)

(2) 正方形 P 与 Q 仅有一个公共点. 可以利用 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\geqslant 2$ 或 $a+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta+\frac{1}{2}-a\operatorname{tg}\beta=\left(a-\frac{1}{2}\right)(1-\operatorname{tg}\beta)\geqslant 0$, $\left(a\geqslant\frac{1}{2},\ \beta\leqslant 45^\circ\right)$.

23. 如果有两个相对的顶点, 比如说 A、C 在同一个集合里, 那么这集合的直径 $=AC=\sqrt{2}>\frac{\sqrt{5}}{2}$. 现在假定 A、D 在第一个集合, B、C 在第二个集合,如果 AB 的中点 E 在第一个集合, 那么这个集合的直径 $\geqslant DE=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 如果 E 在第二个集合,情况仿此. 命题的前一部分已经证完, 现证后一部分: 过 E 与 CD 的中点 F 作直线将正方形分成两个点集, 显然这两个点集的直径都不超过 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 所以 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 不能换成更大的数.



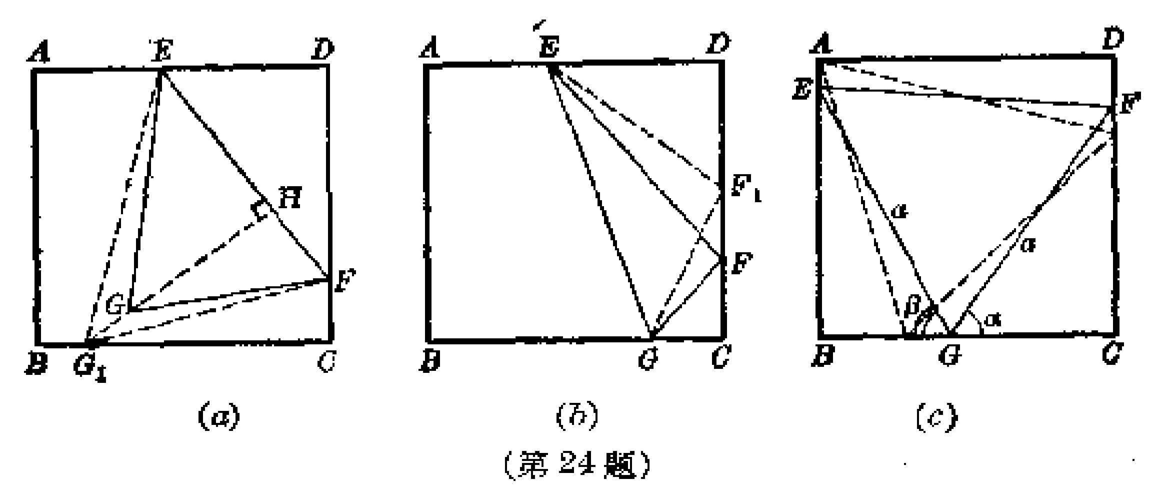
(第 23 题)

24. 只要证明 $\triangle EFG$ 的最小边 $\leqslant\sqrt{6}-\sqrt{2}$. 经过运动(平移与旋转),可以使 E、F 在正方形的边上. 如果 G 不在正方形的边上,如图(a)所示, 使 G 沿着高 GH 移动到 G_1, $\triangle GEF$ 的边长不会减少. 我们可以假定在所有的内接三角形中, $\triangle GEF$ 的最小边最长, 如果能证明它的最小边 $\leqslant\sqrt{6}-\sqrt{2}$,命题就成立了. 在这样的假设下, 我们断

定 $\triangle EFG$ 是正三角形，否则，可以象图 (b) 那样使 F 点在 CD 上移动，将最小边 FG 增大。因此，我们只要证明内接正三角形的边长 $\leqslant \sqrt{6}-\sqrt{2}$，这就是 1978 年全国数学竞赛的一个问题，解法很多。如图 (c)，$a\cos\alpha+a\cos\beta=1$，所以

$$a=\frac{1}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{1}{2\cos 60^\circ\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{1}{\cos(\beta-60^\circ)},$$

不难看出在 E 点与 A 重合时，β 最大，其值为 75°，此时 a 也最大，其值为 $1/\cos 15^\circ=\sqrt{6}-\sqrt{2}$。



(a) (b) (c)

(第 24 题)

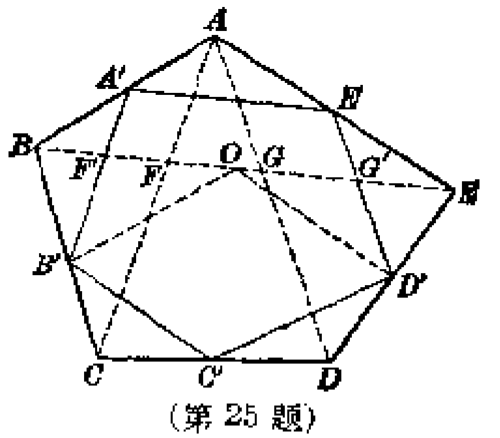
25. 连 BE、AC、AD，得交点 F、F'、G、G' 如图。设 BE 中点为 O。由于 $BF'=\frac{1}{2}BF\leqslant BO$，$EG'\leqslant EO$，所以 O 在 F'、G' 之间。

$B'C'D'G'F'$ 的面积

$\geqslant B'C'D'O$ 的面积

$=\frac{1}{2}\times BCDE$ 的面积

(参看第 8 题) (1)



(第 25 题)

又从图中不难看出 $F'G'\geqslant A'E'$，所以

$$\text{梯形 } A'F'G'E' \text{ 的面积} > \frac{1}{2}\times\triangle ABE \text{ 的面积} \qquad (2)$$

将(1)、(2)两式相加即得结论。

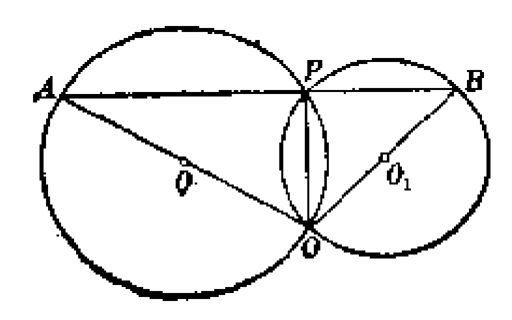
26. 如果 $\angle A$ 为钝角，那么 $DD'>AD'$，命题显然成立。假定

$\triangle ABC$ 为锐角三角形. 命题等价于下面的不等式:

$$\triangle BDC\text{ 的面积}+\triangle AEC\text{ 的面积}$$
$$+\triangle AFB\text{ 的面积}\geqslant\triangle ABC\text{ 的面积}. \quad (1)$$

我们先不固定 K 为内心, 看看在 K 为什么点时, (1) 式能成为等式. 不难看出, 在 K 为垂心时, 由于 $\triangle BDC\cong\triangle BKC$, 所以(1)成为等式(在 K 为外心时,(1)也是等式). 但当 D 为 $\overset{\frown}{BC}$ 中点时, $\triangle DBC$ 的面积取得最大值, 所以在 K 为内心时, (1)式成立.

27. 当 $AB\perp PQ$ 时, $AQ\times QB$ 最大. 事实上, 这时 AQ 与 QB 分别为 $\odot O$ 与 $\odot O_1$ 的直径.



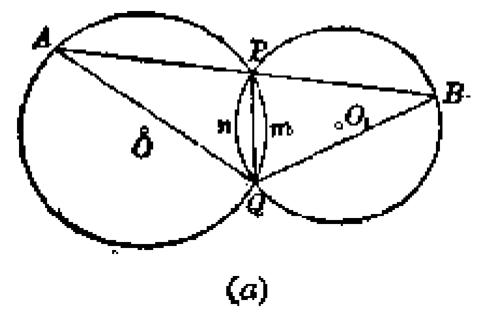
(第 27 题)

28. 显然 $\overset{\frown}{PmQ}$ 的张角 A 与 $\overset{\frown}{PnQ}$ 的张角 B 都是大小一定的角.

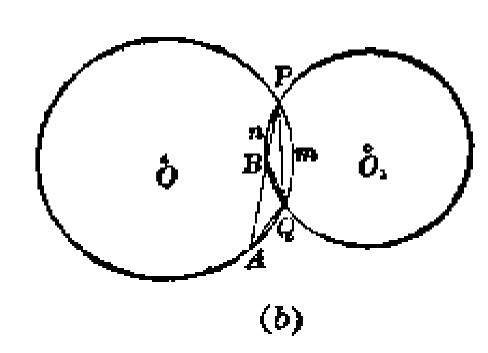
$$PA\times PB=\frac{PQ\times\sin\angle AQP}{\sin A}\times\frac{PQ\times\sin\angle BQP}{\sin B}$$
$$=\frac{PQ^2}{2\sin A\sin B}[\cos(\angle AQP-\angle BQP)-\cos(\angle AQP+\angle BQP)]$$

第一种情况(图 a), $\angle AQP+\angle BQP=180°-A-B=$定值, 所以在 $\angle AQP=\angle BQP=\frac{1}{2}(180°-A-B)$, 即割线为 $\angle O_1PO_2$ 的外角平分线时, $PA\times PB$ 为最大.

第二种情况(图 b), $\angle AQP-\angle BQP=\angle AQB=180°-A-B=$定值, 所以在 $\triangle AQP+\angle BQP=180°$, 即割线为 $\angle O_1PO_2$ 的平分线时, $PA\times PB$ 最大. $\left(\text{此时 }\angle AQP=180°-\frac{1}{2}(A+B)\right)$.



(a)



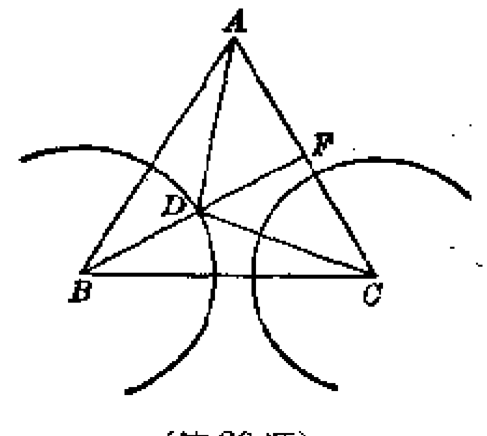
(b)

(第 28 题)

综合起来，在 $A+B<90^\circ$ 时以第一种情况为最大，而在 $A+B>90^\circ$ 时以第二种情况为最大，最大值都是

$$\frac{PQ^2}{2\sin A\sin B}[1+|\cos(A+B)|]$$

29. 假定战士从正三角形 ABC 的顶点 A 出发。分别以 B、C 为圆心，$\frac{h}{2}$ 为半径画圆，要探测到 B 和 C，必须经过 $\odot B$ 上一点 D 和 $\odot C$ 上一点 E。



(第 29 题)

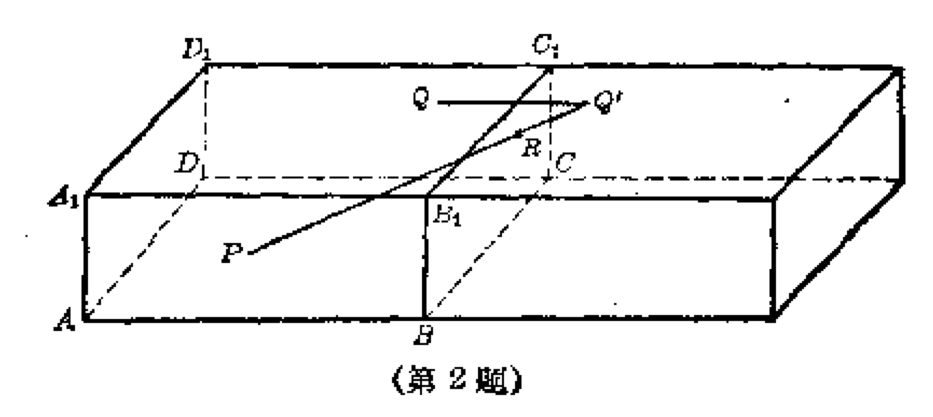
现在我们来选择 D 和 E，使 $AD+DE$ 最小。先固定 D，不难看出当 E 为 CD 与 $\odot C$ 交点时 DE 最小。于是问题归结为确定 D，使 $AD+DC$ 为最小。利用等高线可知 D 应当是一个椭圆与 $\odot B$ 的切点，这个椭圆的焦点是 A 与 C。由此可得，D 点在角平分线 BF 上。于是战士的最短路程应当是折线 ADE，其中 D 为高 BF 的中点，E 为 CD 与 $\odot C$ 的交点，容易验证沿这样的路线可以查遍整个区域。

也可以根据光学来确定 D，即假定光线从 A 出发，经过圆的镜子反射到 C，由入射角＝反射角，推出 BD 是角平分线。

习题八解答

1. 实际上即习题一第 14 题。

2. 作出 Q 关于面 BCC_1B_1 的对称点 Q'，PQ' 与面 BCC_1B_1 的交点



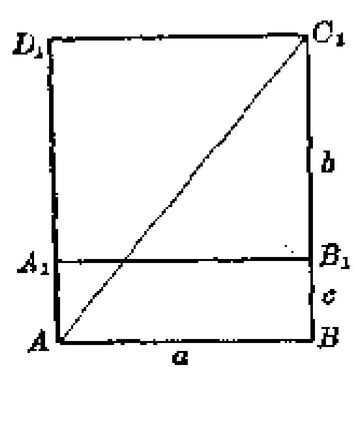
(第 2 题)

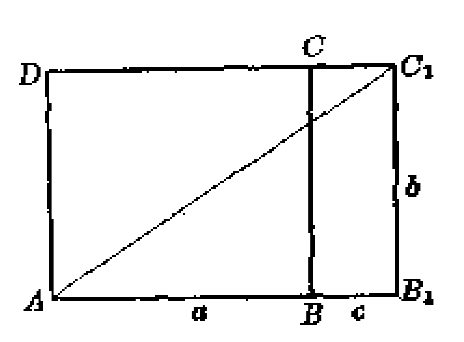
R 即为所求.

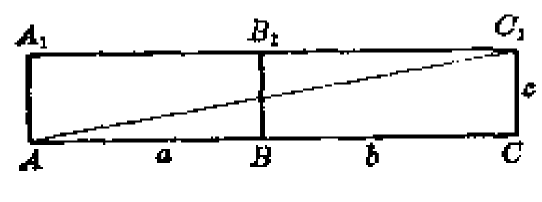
3. 有三种展开的方法，如图所示.

∵ $\sqrt{(a+b)^2+c^2} \geqslant \sqrt{(a+c)^2+b^2} \geqslant \sqrt{a^2+(b+c)^2}$,

∴ 最短长为 $\sqrt{a^2+(b+c)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$.







（第 3 题）

4. 设 P 在平面 ABC 上的投影为 P'，显然 $P'A+P'B+P'C \leqslant PA+PB+PC$. ∴ $PA+PB+PC$ 为最小时，P 一定在平面 ABC 内，然后参看 § 4.

5. 仿照 § 1 例题 9.

6. 参看 § 3 例题 5. C 在过 A、B 的大圆上，并且是这个大圆的优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点.

7. 参看 § 5 例题 2, $l=a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}$ $\geqslant a+b+c+\sqrt{2ab}+\sqrt{2bc}+\sqrt{2ca} \geqslant 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt{2}\sqrt[3]{abc}$ $=3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{abc}$.

$$\therefore \quad V=\frac{1}{6}abc \leqslant \frac{1}{6}\left[\frac{l}{3(1+\sqrt{2})}\right]^3=\frac{(5\sqrt{2}-7)l^3}{162},$$

8. 固定一个顶点及高，由习题三第 5 题，体积最大者底面为正三角形. 同理其他各面也为正三角形. 故体积最大者为正四面体.

9. 由上一题，半径为 R 的球的内接四面体中，以正四面体体积为

最大，不难算出其体积为 $\frac{8}{9\sqrt{3}}R^3$. 因此经压缩后所得椭球的内接四面体的体积 $\leqslant \frac{8}{9\sqrt{3}}abc$.

10. (1) 不一定. 如"极限化"，使 D、P 全在平面 ABC 内，由 § 4，很可能有 $PA+PB+PC>DA+DB+DC$（比如说 D 为 Fermat 点）. 即使将 P、D 稍微"升高"一点并且使 P 点在四面体 $ABCD$ 内，刚才的不等式仍然可以保持.

(2) 不一定. 设想 $\triangle ABC$ 固定，而 D、$P\to\infty$，但 D、P 很近.

(3) 不能. 设想 AB 固定，C、D、P 均趋于 AB 上一固定点 E.

11. 取 AB 中点 O 为原点，记向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$ 为 $-\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$，又记 $\max(CA+CB,\ DA+DB)=r$，

则由 (1) 式对于线段 CD 上任一点 E 存在非负实数 λ、μ，使 $\overrightarrow{OE}=\lambda\boldsymbol{v}_1+\mu\boldsymbol{v}_2$，并且 $\lambda+\mu=1$.

$$\because\quad |\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{c}|\leqslant r,\quad |\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{c}|\leqslant r$$

$$\therefore\quad |\lambda\boldsymbol{v}_1+\mu\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{c}|+|\lambda\boldsymbol{v}_1+\mu\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{c}|$$

$$=|\lambda(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{c})|+|\lambda(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{c})|$$

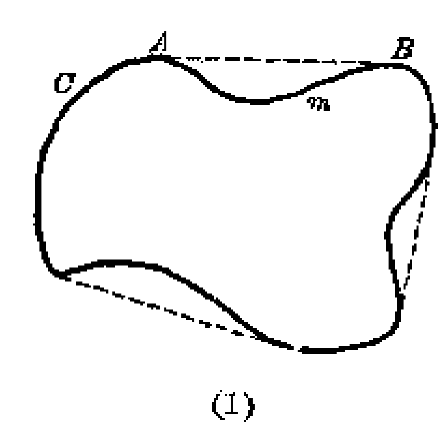
$$\leqslant\lambda|\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{c}|+\mu|\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{c}|+\lambda|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{c}|+\mu|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{c}|$$

$$=\lambda(|\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{c}|)+\mu(|\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{c}|)$$

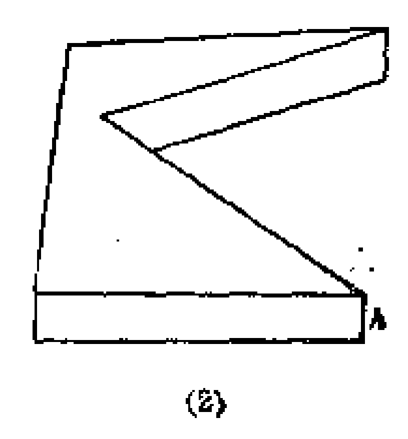
$$\leqslant\lambda r+\mu r=r.$$

即 $EA+EB\leqslant\max(CA+CB,\ DA+DB)$.

12. (1) 正确. C' 无非是将 C 凹进去的部分，如图(1)中 AmB，用



(1)



(2)

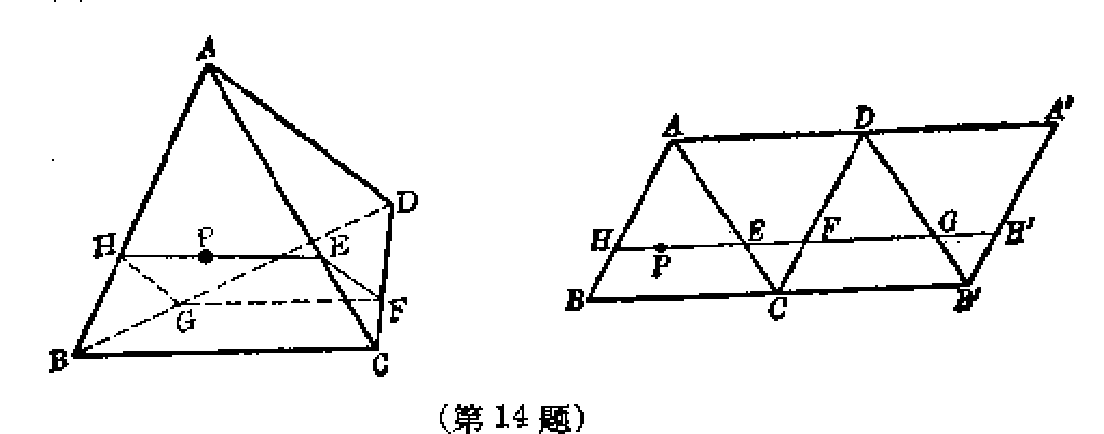
（第 12 题）

线段 AB 来代替.

(2) 不正确. 如 S 为图(2)中的立体,则在 h 很小时,S' 的面积 $>S$ 的面积.

13. O 也是四面体 $ABCD$ 的重心,由例题10可知 $OA^2+OB^2+OC^2+OD^2\leqslant PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$,因此 PA、PB、PC、PD 中一定有不小于 OA 的. 设各棱中点为 E、F、G、H、I、J,O 在各面的射影为 O_1,O_2,O_3,O_4,则四面体 $ABCD$ 可以分成若干个四棱锥,P 必在某一个四棱锥,比如说 $O-AEO_1F$ 中,而 $O-AEO_1F$ 完全在以 A 为中心,OA 为半径的球内,因此 P 也在这个球内,即 $PA\leqslant OA$.

14. 将四面体 $ABCD$ 剪开铺平,显然以过 P 点的与 AA' 平行的线段 HH' 为最短路线. 由于正四面体的对棱互相垂直,可知最短路线是一个矩形.



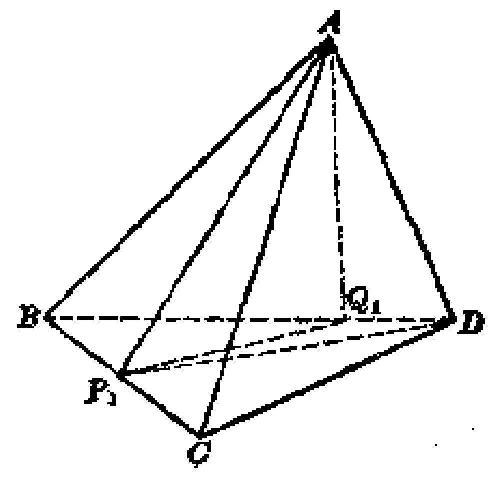
(第14题)

15. 设四面体 $ABCD$ 的最长的一条棱为 AB,则 $AC+BC>AB$,$AD+BD>AB$ 所以 $(AC+AD)+(BC+BD)>2AB$,从而 $AC+AD>AB$ 或 $BC+BD>AB$ 至少有一个成立(否则便得到 $AC+AD+BC+BD\leqslant 2AB$),顶点 A 或 B 即为所求.

16. 过 A、B、C、D 分别作平面与这点所对的面平行,交得一个正四面体 $A'B'C'D'$,$OA+OB+OC+OD$ 即 O 到正四面体 $A'B'C'D'$ 各面的距离的和,也就等于正四面体 $A'B'C'D'$ 的高(用两种方法计算正四面体 $A'B'C'D'$ 的体积就可以证出). 而 $PA+PB+PC+PD\geqslant P$ 到正四面体 $A'B'C'D'$ 各面的距离的和 $=$ 正四面体 $A'B'C'D'$ 的高.

17. 设四面体 $ABCD$ 中只有 $AB>1$,E、F 分别为 AB、CD 的中点,

记 $AB=x$, $CD=y$, $EF=z$, 则 $V\leqslant\frac{1}{6}xyz$. 而 $y\leqslant1$, $z\leqslant1$, $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+z^2\leqslant1^2$, 在这样的限制条件下不难求出 V 的最大值在 $y=1$, $\frac{x}{2}=z=\frac{\sqrt{6}}{4}$ 时取得, 且 $V_{最大}=\frac{1}{6}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot1=\frac{1}{8}$. 对于所述三角形, $S\leqslant\frac{1}{2}$.



(第 18 题)

18. 不妨设平面 PAQ 分别与 BC、BD 交于 P_1、Q_1, 只要证明 $\angle P_1AQ_1<60^\circ$ 就可以了. 仿照习题二第 1 题, 不难证明 $\angle P_1AQ_1<\max(\angle P_1AD, \angle P_1AB)$(在三面角 $A-BP_1D$ 中, 把面角作为"边", 二面角作为"角", 由于二面角 P_1-Q_1A-B 与 P_1-Q_1A-D 中有一个 $\geqslant90^\circ$, 它所对的面角 $>\angle P_1AQ_1$). 同样 $\angle P_1AD<\max(\angle BAD, \angle CAD)=60^\circ$. 所以 $\angle PAQ<60^\circ$.

19. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{k}$, 则

$$\begin{aligned}
&AC^2+BD^2+AD^2+BC^2-AB^2-CD^2\\
&=\boldsymbol{j}^2+(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i})^2+\boldsymbol{k}^2+(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i})^2-\boldsymbol{i}^2-(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})^2\\
&=\boldsymbol{j}^2+\boldsymbol{k}^2+\boldsymbol{i}^2-2\boldsymbol{ki}+\boldsymbol{k}^2+\boldsymbol{j}^2+\boldsymbol{i}^2-2\boldsymbol{ij}-\boldsymbol{i}^2-\boldsymbol{j}^2-\boldsymbol{k}^2+2\boldsymbol{jk}\\
&=\boldsymbol{i}^2+\boldsymbol{j}^2+\boldsymbol{k}^2-2\boldsymbol{ij}-2\boldsymbol{ki}+2\boldsymbol{jk}\\
&=(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})^2\geqslant0.
\end{aligned}$$